第 2 章

プラズマの特性物理量

本章では，全体としては電荷中性であるが，微視的に見れば正と負の電荷が入り交じった媒質となっているプラズマを特徴付ける現象とパラメータとして，以下の項目について述べる．

- 電子温度とイオン温度
  電子とイオンの熱的無秩序速度は Maxwell 分布で近似され，それぞれの温度が定義される．
- Debye 長
  これより微視的に見たら，もうプラズマとは見なせない
- シースと Bohm のシース条件
  純粋なプラズマは，電荷中性で，電位勾配ゼロであるが，壁近傍では，非中性となり，電位勾配がある．その領域をシースという．シース形成が形成されるためには，イオンがある速度以上でシースに突入しなければならない．これを Bohm のシース条件という．
- 両極性拡散
  質量が極端に異なる正負の荷電粒子が拡散すると，軽い方は重たい方に引っ張られ，重たい方は軽い方に引っ張られる．最終的には両方とも重たい方の拡散速度に支配されてしまう．
- プラズマ振動とプラズマ周波数
  正負の荷電粒子が混在した媒質では，荷電粒子の電荷量と質量によって決まる振動が発生する．
- イオン音波
  正負の荷電粒子が混在した媒質で，一部にその均衡からずれた部分が発生すると，それが電子温度とイオンの質量で決まるイオン音速で伝播する．これをイオン音波と呼ぶ．

2.1　プラズマとは

低圧の気体分子や原子 (以下では単に気体という) を含むガラス管内に対向する電極を設け，電極間の電圧を徐々に増加させると，数百 V 程度で急激に電流が増大し，電極間に発光が観測される．この現象を放電という．このときのガラス管内に存在する媒質は，単純な気体ではなく，気体の一部が**図 2.1**(a) に示すように，電子と正イオン (以下，単にイオンという) に電離した状態となっている．このような状態にある媒質のことをプラズマという (電離気体とも呼ばれる). [*1]

プラズマ中の正のイオンと負の電子の密度 (プラズマ密度という) は，ほぼ同じであり，気体と同様に熱的な無秩序速度で運動をしているため，後述のようにマクロに見ると電気的に中性となっている．しかし，電子とイオンは，それぞれが電場によって反対方向にドリフトするため導電性を持つ．従って，プラズマは，気体と異なり，外部からの電磁場によってその挙動を制御できるという特徴を有する．

1 Pa 程度の低圧プラズマの場合, 気体の数密度が 10^{20} m^{-3} であるのに対し, プラズマ密度は高くても 10^{17} m^{-3} 程度である．即ち，ほとんどの粒子は中性の気体のままで存在している．このようなプラズマを**弱電離プラズマ**という．これに対し，100% 電離しているものを**完全電離プラズマ**という．薄膜堆積やエッチングなどのプロセスに用いられる低圧プラズマや発光現象を利用した蛍光灯やネオンサインなど，ほとんどの低圧プラズマは弱電離プラズマである．完全電離プラズマの例は限られているが，核融合用のプラズマを挙げることができる．

[*1] 広い意味では，正負の電荷が等量混在しているあらゆる媒質がプラズマの範疇に入る．

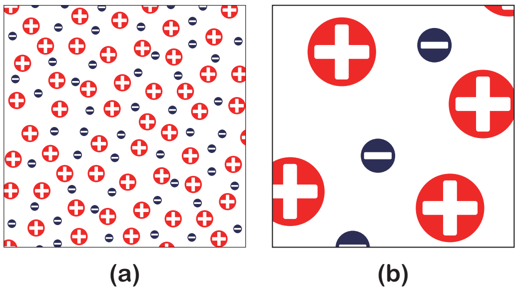

図 2.1 プラズマ中の荷電粒子の空間分布を異なる寸法で見たときの概念図.

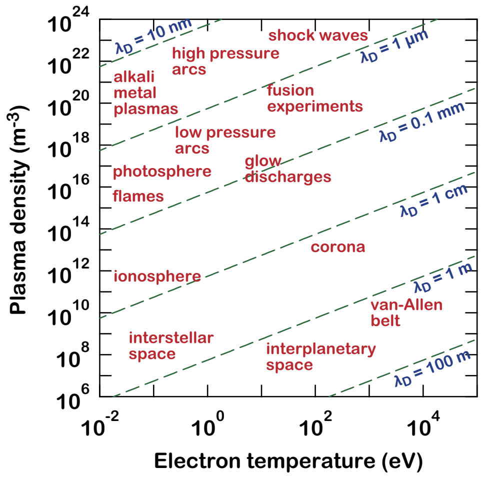

図 2.2 各種のプラズマの電子温度と電子密度の領域 [1].

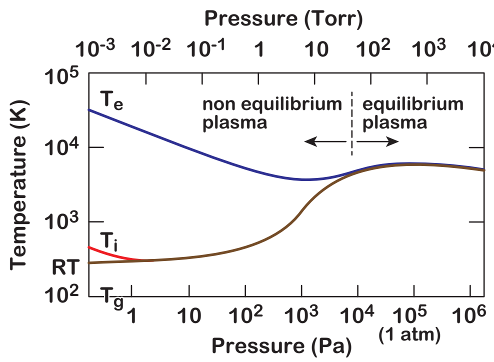

図 2.3 水銀蒸気のプラズマの電子温度 T_e，イオン温度 T_i，ガス温度 T_g の圧力依存性．原著には T_i は描かれていないため，追加した [2].

2.2　プラズマの温度

プラズマ中の電子とイオンは，熱的に無秩序な速度で運動しており，それぞれが熱平衡状態にある場合には，その速度分布関数は，Maxwell 分布となる．[*2] 従って，それぞれの温度を定義することができる．電子温度を T_e，イオン温度を T_i とすると，以下のように表される．

$$\frac{1}{2}m_\mathrm{e}\langle v_\mathrm{e}^2\rangle = \frac{3}{2}k_\mathrm{B}T_\mathrm{e}, \tag{2.1}$$

$$\frac{1}{2}M_\mathrm{i}\langle v_\mathrm{i}^2\rangle = \frac{3}{2}k_\mathrm{B}T_\mathrm{i}. \tag{2.2}$$

ここで，m_e，$\langle v_\mathrm{e}^2\rangle$ は，電子の質量と二乗平均速度，M_i，$\langle v_\mathrm{i}^2\rangle$ は，イオンの質量と二乗平均速度である．k_B は Boltzmann 定数である．

これらの温度は，プラズマの諸量を表す際に頻繁に現れるパラメータであり，プラズマの密度とともにプラズマを特徴付ける最も重要なパラメータの一つとなっている．**図 2.2** は，各種のプラズマがもつ電子温度とプラズマ密度を示したものである [1]．本講義で扱うプラズマは，glow discharges と書かれている領域のプラズマを扱う．

なお，本講義で対象とする低圧気体のプラズマ中では，軽い電子の温度 T_e が数 eV 程度 (数千 °C) であるのに対し，重たいイオンや中性粒子 (まとめて重粒子という) の温度は，高くても 10^{-1} eV 程度 (数百 °C) となる．この原因の一つは，高温の (即ち，高速の) 電子が，中性粒子やイオンに弾性衝突をしたとしても，電子の質量が小さいため，1 回の衝突では，電子の温度が十分に中性粒子に与えられないということにある．[*3] 電子の温度と重粒子の温度が異なるためには，もう一つ要因が必要となる．それは，電子と重粒子の衝突頻度が小さい，即ち，低圧という条件である．これら二つの条件が満たされた低圧プラズマ中では，電子温度と重粒子の温度が大きく異なることになる．そのため，そのようなプラズマを**「低温プラズマ」**，または**「非平衡プラズマ」**と呼ぶ (気体の温度と電子温度が大幅に異なるという意味で).

一方，衝突頻度が数桁大きい高圧放電になると，電子温度とガス温度が十分な衝突回数を経て平衡状態に到達する．このため，高圧放電で得られるプラズマは，一般には，ガス温度が極めて高い熱プラズマとなる．**図 2.3** は，プラズマ中の電子温度，イオン温度，ガス温度のガス圧力依存性を示したチャートである [2]．低圧プラズマの場合には，電子温度とガス温度に大きな違いがある

[*2] 第 10 章を参照されたし．
[*3] 第 10 章の課題「電子と重粒子の弾性衝突」を参照されたし．

が，大気圧 (10 MPa = 760 Torr) でプラズマを生成すると，一般には熱平衡プラズマ (熱プラズマ) となる．

低温プラズマは，気体の温度を低温に保ったまま，高温の (即ち，高エネルギーの) 電子による分子の解離などを利用することができるため，熱に弱い材料を対象とした様々な材料プロセス技術に利用されている．

2.3 Debye 長

プラズマとは，**図 2.1**(a) に示すように，マクロに見れば，正電荷を有する粒子と負電荷を有する粒子が等量混在している状態，もしくはその状態にある媒質のことである．プラズマがこのような状態にあることを，「プラズマは電荷中性である」という言い方をする．これは，プラズマの定義の一つにもなっている．しかし，**図 2.1**(b) に示すように，ミクロに見れば，正と負の荷電粒子の分布が空間的に偏在している状態となる．この図のように切り取った領域の中には，正電荷が約 4 個と負電荷が約 2 個半が存在しているから，正味の電荷量は正電荷の方が多い領域となっている．即ち，ある寸法よりも小さい領域だけに注目すると，もはやプラズマと言えなくなる寸法があることになる．その寸法を**デバイ (Debye) 長**と呼んでいる．プロセスに用いられる典型的な非平衡プラズマの場合，Debye 長は次式で与えられる．

$$\lambda_{\mathrm{D}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 k_{\mathrm{B}} T_{\mathrm{i}}}{n_0 q_0^2}} \tag{2.3}$$

ここで，n_0 はプラズマ密度であり，[*4] T_{i} はイオン温度である．[*5]

実用公式として，以下のような式もある．

$$\lambda_{\mathrm{D}}\ [\mathrm{cm}] = 740\sqrt{\frac{T_{\mathrm{i}}\ [\mathrm{eV}]}{n_0\ [\mathrm{cm}^{-3}]}} \tag{2.4}$$

プロセスプラズマの典型例として，イオン温度が T_{i} = 400 K (= 0.034 eV)，プラズマ密度が $n_0 = 10^{17}$ $\mathrm{m}^{-3} = 10^{11}$ cm^{-3} とすると，Debye 長は，$\lambda_{\mathrm{D}} = 4.3\ \mu\mathrm{m}$ となる．これに対し，典型的なプロセスプラズマの大きさは数 cm から数十 cm である．従って，プラズマの寸法と比較すると，Debye 長は極めて小さい寸法なのである．

*4 電荷中性のプラズマ中では，電子密度を n_{e}，イオン密度を n_{i} とすれば，$n_0 = n_{\mathrm{e}} = n_{\mathrm{i}}$ である．

*5 多くの教科書で，イオン温度 T_{i} ではなく，電子温度 T_{e} としている．しかし，そうして得られる Debye 長は，プラズマが電荷中性に見えなくなる限界の寸法よりも大きなものとなる．後述の Debye 長の導出の節を参照されたし．

2.4 Debye 長の導出

2.4.1 Debye 長の導出の準備

プラズマが電荷中性に見えなくなる寸法, 即ち, Debye 長は，プラズマ中に一つの試験電荷 (電荷量を $q_{\mathrm{s}} > 0$ とする) を置いたときに，その電荷による影響がどれくらいの距離まで及ぼされるのか，という観点で求められる．ここでいう「影響」とは，その試験電荷によるポテンシャル変動である．試験電荷のまわりに形成されるポテンシャルは球対称であるから，この問題を解くにあたって，座標系として試験電荷を原点とする球座標を用いることにする．また，導出に先立って，以下のような準備を行う．

プラズマ中の電子，イオンの密度をそれぞれ $n_{\mathrm{e}} = n_{\mathrm{e}}(r)$，$n_{\mathrm{i}} = n_{\mathrm{i}}(r)$ とし，これらは以下のように Maxwell-Boltzmann 分布に従っているものとする．

$$n_{\mathrm{e}} = n_0 \exp\left(+\frac{q_0 V}{k_{\mathrm{B}} T_{\mathrm{e}}}\right), \tag{2.5}$$

$$n_{\mathrm{i}} = n_0 \exp\left(-\frac{q_0 V}{k_{\mathrm{B}} T_{\mathrm{i}}}\right). \tag{2.6}$$

ここで，$V = V(r)$ はポテンシャル，T_{e} は電子温度，T_{i} はイオン温度である．また，試験電荷から十分離れた位置における電子とイオンの密度は，試験電荷を置く前の電荷中性のプラズマ密度 n_0 に等しいとしている．また，空間電荷密度とポテンシャルの間には，以下に示す Poisson の式が成り立つ．

$$\nabla^2 V = -\frac{q_0}{\varepsilon_0}(n_{\mathrm{i}} - n_{\mathrm{e}}) - \frac{q_{\mathrm{s}}}{\varepsilon_0}\delta. \tag{2.7}$$

ここで，$\delta = \delta(r)$ は試験電荷が原点だけに存在することを表す Dirac のデルタ関数である．試験電荷のまわりのポテンシャル V は，この式を解くことによって得られる．

式 (2.7) を解く前に，式 (2.5) と式 (2.6) に対して，以下の近似を適用する．即ち，プラズマ中のイオンの熱運動エネルギー $k_{\mathrm{B}} T_{\mathrm{i}}$ と電子の熱運動エネルギー $k_{\mathrm{B}} T_{\mathrm{e}}$ は，以下のように，プラズマ中の電荷によるポテンシャルエネルギー $q_0 V$ よりも十分に小さいとする．

$$\frac{q_0 V}{k_{\mathrm{B}} T_{\mathrm{e}}} \ll 1, \tag{2.8}$$

$$\frac{q_0 V}{k_{\mathrm{B}} T_{\mathrm{i}}} \ll 1. \tag{2.9}$$

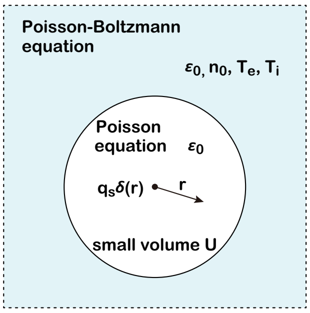

図 **2.4** Poisson-Boltzmann 方程式 (Green 関数問題) を解くための空間設定.

この近似は，一般的なプロセスプラズマの場合には成り立つことがわかっている．*6 上記の仮定を適用すると，式 (2.5) と式 (2.6) の指数関数は，以下のように，テーラー展開の第 1 項までで近似することができる．

$$n_{\mathrm{e}} = n_0\left(1+\frac{q_0 V}{k_{\mathrm{B}}T_{\mathrm{e}}}\right), \tag{2.10}$$

$$n_{\mathrm{i}} = n_0\left(1-\frac{q_0 V}{k_{\mathrm{B}}T_{\mathrm{i}}}\right). \tag{2.11}$$

式 (2.10) と式 (2.11) を用いて，式 (2.7) を書き直すと，次式のようになる．

$$\nabla^2 V = \frac{V}{\lambda_{\mathrm{D}}^2} - \frac{q_{\mathrm{s}}}{\varepsilon_0}\delta. \tag{2.12}$$

ここで，λ_{D} は，以下のように定めたものである．

$$\frac{1}{\lambda_{\mathrm{D}}^2} = \frac{1}{\lambda_{\mathrm{Di}}^2} + \frac{1}{\lambda_{\mathrm{De}}^2}, \tag{2.13}$$

$$\lambda_{\mathrm{Di}}^2 = \frac{\varepsilon_0 k_{\mathrm{B}} T_{\mathrm{i}}}{n_0 q_0^2}, \tag{2.14}$$

$$\lambda_{\mathrm{De}}^2 = \frac{\varepsilon_0 k_{\mathrm{B}} T_{\mathrm{e}}}{n_0 q_0^2}. \tag{2.15}$$

後で判ることになるのだが，ここで定めた λ_{D} が，本節で導入した Debye 長の概念に対応するパラメータとなる．以下では，そのことを明らかにするために，式 (2.12) を具体的に解き，ポテンシャルを表す関数の中で λ_{D} がどのように関与しているのかを確認する．

式 (2.12) は，Poisson-Boltzmann 方程式とも呼ばれている方程式であり，数学的には Green 関数問題の一つである．このような問題を解くにあたり，**図 2.4** に示すように，試験電荷に極めて近い場所と離れた場所の二つに場合分けする．試験電荷に極めて近く，試験電荷以外の荷電粒子が存在しないような微小体積 $\boldsymbol{U}$ を考えると，その中では，式 (2.12) の右辺が $(q_{\mathrm{s}}/\varepsilon_0)\delta$ だけの Poisson-Boltzmann 方程式となる．一方，その領域の外では，式 (2.12) の右辺が，V/λ_{D}^2 だけの Poisson 方程式となる．従って，解くべき式は，それぞれの領域において以下のような式となる．

$$\nabla^2 V = -\frac{q_{\mathrm{s}}}{\varepsilon_0}\delta \qquad (r \in U), \tag{2.16}$$

$$\nabla^2 V = \frac{V}{\lambda_{\mathrm{D}}^2} \qquad (r \notin U). \tag{2.17}$$

次節以降では，これらを解いて，試験電荷の周囲のポテンシャル分布を求める．

2.4.2 試験電荷近傍の解

式 (2.16) は Green 関数問題の典型例であり，その解が Coulomb ポテンシャルになることは良く知られている．ここでは，電磁気学の復習も兼ねて，真空中の点電荷近傍のポテンシャルを求める古典電磁気学の問題として扱ってみよう．

試験電荷が形成する電場を $\boldsymbol{E}$，微小体積 U の中の電荷密度を ρ とすると，次式が成り立つ．

$$\int_U \nabla\cdot\boldsymbol{E}\,\mathrm{d}U = \int_U \frac{\rho}{\varepsilon_0}\,\mathrm{d}U = \frac{q_{\mathrm{s}}}{\varepsilon_0}. \tag{2.18}$$

Gauss の法則を用いれば，上式は以下のように書き換えられる．

$$\int_U \nabla\cdot\boldsymbol{E}\,\mathrm{d}U = \int_S \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}S. \tag{2.19}$$

ここで，$\boldsymbol{S}$ は $\boldsymbol{U}$ の境界である．球対称であるから，$\boldsymbol{E}$ の r 方向の成分を $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}(r)$ と書けば，

$$\int_S \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}S = 4\pi r^2 E \tag{2.20}$$

となる．式 (2.18)，式 (2.19)，式 (2.20) より，$\boldsymbol{E}$ は，

$$E = \frac{q_{\mathrm{s}}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \tag{2.21}$$

という Coulomb 電場を表すものとなる．また，ポテンシャルを $V_{\mathrm{C}} = V_{\mathrm{C}}(r)$ とすれば，

$$E = -\frac{\mathrm{d}V_{\mathrm{C}}}{\mathrm{d}r} \tag{2.22}$$

である．従って，試験電荷の極近傍のポテンシャルは，よく知られている以下のような Coulomb ポテンシャルとなる．

$$V_{\mathrm{C}} = \frac{q_{\mathrm{s}}}{4\pi\varepsilon_0 r}. \tag{2.23}$$

*6 具体的事例を示さないと根拠薄弱.

2.4.3 試験電荷から離れた場所の解

式 (2.17) を解くにあたり，まず，微分演算子を球対称の場合の微分演算子に変換する．すると，次式が得られる．

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right)=\frac{V}{\lambda_{\mathrm{D}}^2}. \tag{2.24}$$

ここで，多少天下り的であるが，解となるポテンシャル $V=V(r)$ がクーロンポテンシャル V_{C} に少し修正が入ったような形で表されるものと仮定する．具体的には，以下のように，V_{C} から逸脱するということを係数 $K=K(r)$ を掛けることで表現することにする．

$$V=V_{\mathrm{C}}K. \tag{2.25}$$

このように表現するのは，後述のように式 (2.25) を式 (2.24) に代入すれば，K に関する独立した方程式が得られるからである．

実際に式 (2.25) を式 (2.24) に代入してみると，以下のような方程式が得られる．

$$\frac{\mathrm{d}^2K}{\mathrm{d}r^2}=\frac{K}{\lambda_{\mathrm{D}}^2}. \tag{2.26}$$

この微分方程式は，以下の二つの解を持つ．

$$K_1=\exp\left(-\frac{r}{\lambda_{\mathrm{D}}}\right), \tag{2.27}$$

$$K_2=\exp\left(+\frac{r}{\lambda_{\mathrm{D}}}\right). \tag{2.28}$$

これらのうち，K_2 は，$r\to\infty$ で無限大となるため，ここで求めようとしているポテンシャルを表す解としては適切ではない．[*7] 一方，K_1 については，全ての r について有限の値を持つ．そこで，K_1 の方を採用し，式 (2.25) に代入する．すると，次式が得られる．

$$V=\frac{q_{\mathrm{s}}}{4\pi\varepsilon_0 r}\exp\left(-\frac{r}{\lambda_{\mathrm{D}}}\right). \tag{2.29}$$

これがプラズマ中に試験電荷を置いたときに，試験電荷から離れた場所に形成されるポテンシャルを表す式となる．

この式 (2.29) から，λ_{D} というパラメータが，Debye 長の概念に合致したパラメータであることがわかる．それを次節で確認しよう．

[*7] r が負なら OK だが，球座標系において $r<0$ というのはないので，K_2 は想定している現象を表す解になっていない．

2.4.4 Debye 長と Debye 遮蔽

式 (2.29) からわかるように，試験電荷の周囲のポテンシャル分布は，試験電荷が真空中に形成するポテンシャルに対して，指数関数的に減衰する係数 K_1 がかかっている．これをプロットしてみると，**図 2.5** のようになる．従って，プラズマ中のある場所に電荷が与えられた場合，[*8] 変化が生じた場所から Debye 長以上離れると，その電荷が作るポテンシャル V は，$1/r$ に比例する真空中の Coulomb ポテンシャル V_{C} よりも更に減衰する．以上のことから，λ_{D} が既に述べた Debye 長の概念に相当するパラメータであることが確認できる．このように，プラズマ中での局所的な電位変化の影響が Debye 長よりも遠くには及ばないという効果を **Debye 遮蔽**と呼んでいる．

但し，**図 2.5** からもわかるように，試験電荷が置かれている原点からの距離が λ_{D} の地点では，試験電荷を起源とするポテンシャルが無視できるほど小さいとは言い難い．実用的には，

> **デバイ遮蔽が働いている領域は，試験電荷から約 $3\lambda_{\mathrm{D}}$ 以上離れた場所である**

とみることができる．[*9]

なお，プラズマの Debye 長 λ_{D} は，式 (2.14) で定義される電子に関する Debye 長 λ_{De} と，式 (2.15) で定義されるイオンに関する Debye 長 λ_{Di} を用いて，式 (2.13) で定義されている．式 (2.13) の関係式から，λ_{D} は，電子とイオンの影響を並列に考えたときの合成 Debye 長

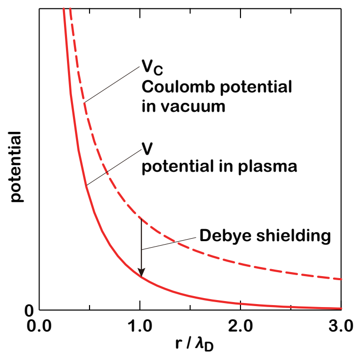

図 2.5 Debye 遮蔽の効果．

[*8] 「ある場所に電位が与えられた場合」でも同様．

[*9] 局所電位を持つのが試験電荷ではなく壁の場合には，この数 λ_{D} という距離が，後述のシースの厚みとなる．

となっていると見ることができる．[*10] プロセスで用いられる典型的な非平衡プラズマでは，$T_\mathrm{i} \ll T_\mathrm{e}$ であるから，$\lambda_\mathrm{Di} \ll \lambda_\mathrm{De}$ となる．従って，

$$\frac{1}{\lambda_\mathrm{D}^2} = \frac{1}{\lambda_\mathrm{De}^2} + \frac{1}{\lambda_\mathrm{Di}^2} \approx \frac{1}{\lambda_\mathrm{Di}^2} \tag{2.30}$$

となる．このことから，以下のことがわかる．

非平衡プラズマ中の Debye 遮蔽を論じるときの Debye 長はイオンの Debye 長で支配されている．

次に，具体的なプロセスプラズマの Debye 長の具体的数値を確認しよう．典型的なプロセスプラズマとして，電子温度が $T_\mathrm{e} = 34{,}800$ K (= 3 eV)，イオン温度が $T_\mathrm{i} = 400$ K のプラズマを想定すると，

$$\begin{aligned} \lambda_\mathrm{De} &= 40\ \ \mu\mathrm{m}, \\ \lambda_\mathrm{Di} &= 4.4\ \mu\mathrm{m}, \\ \lambda_\mathrm{D} &= 4.3\ \mu\mathrm{m}. \end{aligned} \tag{2.31}$$

となり，$\lambda_\mathrm{D} \approx \lambda_\mathrm{Di}$ となることが確認できる．

一方，熱平衡プラズマの場合には，$T_\mathrm{e} = T_\mathrm{i}$ となるので，$\lambda_\mathrm{De} = \lambda_\mathrm{Di}$ となる．従って，熱平衡プラズマの合成 Debye 長は，

$$\lambda_\mathrm{D} = \frac{\lambda_\mathrm{e}}{\sqrt{2}} = \frac{\lambda_\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \tag{2.32}$$

となる．

2.5 シース

プラズマは本来，電荷中性であるが，プラズマが壁と接する近傍において，軽く動きやすい電子が先に壁に輸送され，そこで消滅することにより，重たく動きの鈍い正のイオンが取り残され，電荷中性が成り立っていない空間電荷層が形成される．これをシースという．[*11]

この状況を模式的に表すと，**図 2.6** のようになる．このとき，シースに存在する空間電荷が正の電荷となるため，壁からプラズマに向かう電位勾配は，常に上り坂になる．言い換えれば，プラズマは常に，壁に対して正の電位になるのである．なお，電荷中性のプラズマ領域

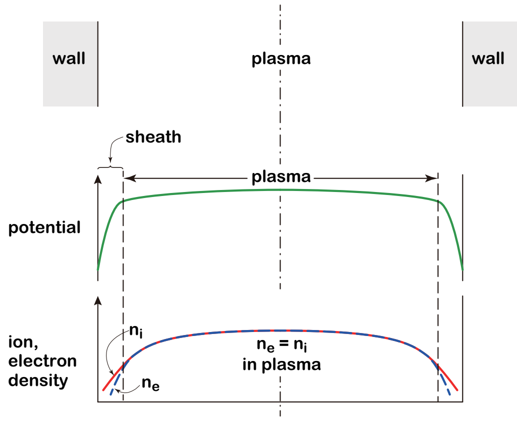

図 2.6 プラズマが壁と接しているときの，電子密度，イオン密度，ポテンシャル分布の概念図．壁近傍において電荷中性が破れている領域が一般にシースと呼ばれている領域になる．

(バルクプラズマと呼ばれることもある) とシース領域の境界をシース端と呼んでいる．[*12]

2.5.1 Bohm のシース条件

前節のようなシースが形成されている場合，イオンがシース端からシースに流れ込むときの入射速度 v_s は，以下の条件を満たしていなければならない，というのが **Bohm のシース条件**と呼ばれるものである [3].

$$v_\mathrm{s} \geq v_\mathrm{B} = \sqrt{\frac{k_\mathrm{B} T_\mathrm{e}}{M_\mathrm{i}}}. \tag{2.33}$$

ここで，M_i はイオンの質量である．v_B はシース端でのイオンが持つべき速度であり，**Bohm 速度**と呼ばれている．それを表す右辺の式は，実はプラズマ中を伝播する音波の速度になっている．従って，Bohm 条件を言葉で表現すれば，以下のようになる．

シースが形成されるためには，イオンはシース端で音速以上の速度をもって流入しなければならない．

典型的なプロセスプラズマの電子温度として $T_\mathrm{e} = 1$ eV とし，イオンとしてアルゴンイオン (質量数 40，質量 6.64×10^{-26} kg) を想定すれば，Bohm 速度は，約 1,600 m/s となる．

Bohm のシース条件では，「Bohm 速度以上で流入」となっているが，後述のイオン音速の節で述べるように，

[*10] 電気回路の抵抗の並列接続のような感じ

[*11] ここからここまでがシースである，という厳密なシース領域を議論するときには，このような簡単な説明では済まないこともある．プラズマから壁に向かって加速されるイオンが，後述の Bohm 速度に到達したところをシースの始まりとすべきである，という論理もある．

[*12] プラズマ端と呼ぶべし，という意見もある．

プラズマ中ではイオンが音速以上になることはできない.*13 従って，実際には，「Bohm 速度で流入」と考えればよい.

この Bohm のシース条件は，壁に衝突するイオンのエネルギーや運動量を考えるときの重要な指針となる．後述のようにシースは極めて薄く，一般にはイオンの平均自由行程よりも短い．これは，シースに突入した後のイオンが，無衝突で壁に到達することを意味する．従って，シース内でのイオンの加速度を決めているポテンシャル分布がわかれば，シースに突入する際のイオンの初速度を Bohm 速度とし，イオンの運動方程式を解くことにより，壁に衝突するときの速度を予測することができる．一次元問題の場合には，速度の大きさしか判らないが，二次元以上の問題に拡張すれば，イオンが壁に衝突するまでの軌道や，壁と衝突するときの入射角を予測することが可能となる．このイオンの入射角に関する情報は，イオン衝撃を援用したエッチングプロセスで極めて重要となる．なぜなら，イオンの入射角がエッチング方向を決めるからである．一般に，イオン支援エッチングでは，垂直エッチングを目的とするが，エッチング対象物の近傍に何らかの構造物が存在すると，イオンを斜入射させるようなポテンシャルが形成されることもある．これを回避するための方策を検討するためには，イオンの入射角の事前予測が極めて重要であることは理解してもらえると思う．

2.5.2 Bohm 条件の導出の前に ~ プレシース ~

Bohm のシース条件では，イオンがシースに突入するときに音速以上の速度を有することを要請する．しかし，**図 2.7** に示すように，プラズマとシースが単純に接続されているようなモデルを想定すると，Bohm のシース条件を満たすことができなくなる．なぜなら，シースに突入する前のイオンが，電荷中性 (即ち，イオンを加速する電位勾配がゼロ) のバルクプラズマ中に存在することになるため，イオンが Bohm 速度に到達することができないからである．もちろん，バルクプラズマ中であっても，イオンは熱運動に起因する速度を有しており，x 方向のイオンの熱運動による速度 $v_{x(\mathrm{th})}$ の自乗平

*13 但し，シースに突入した後は，その領域がもはやプラズマでは無いため，イオンは音速以上の速度になり得ることに留意すべし．

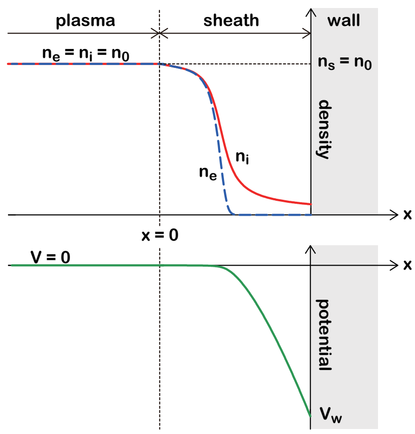

図 2.7 Bohm 条件を導出する際に，プレシースを考慮せずに描いた壁近傍のプラズマとシースの様子．このモデルは物理的に破綻している．

均値は，

$$\sqrt{\langle v_{x(\mathrm{th})}^2 \rangle} = \sqrt{\frac{k_\mathrm{B} T_\mathrm{i}}{M_\mathrm{i}}} \tag{2.34}$$

で与えられる．ここで，M_i はイオン質量，T_i はイオン温度である．しかし，非熱平衡プラズマの場合には，イオン温度 T_i はガス温度に近く，電子温度 T_e よりも小さい ($T_\mathrm{i} \ll T_\mathrm{e}$)．例えば，電子温度 $T_\mathrm{e} = 1$ eV を温度で表せば，$T_\mathrm{e} = 11{,}600$ K である．これに対し，イオン温度は，室温よりも多少高い程度であり，$T_\mathrm{i} = 400$ K 程度である．このとき，上記のイオンの熱速度の自乗平均値は 290 m/s となり，$v_\mathrm{B} = 1{,}600$ m/s よりも小さい．従って，加速の無い等速運動でシース端に到達したとしても，その速度は式 (2.33) で示される Bohm 速度以下なのである．

以上の考察から，イオンがシース端で Bohm 速度を有するためには，イオンがシース端に到達する前に，イオンを加速する領域が存在しなければならない，ということがわかる．この領域を**プレシース (presheath)** と呼ぶ．**図 2.8** は，プレシースを考慮した場合の壁近傍のシースのモデル図である．プレシースは，**図 2.8** に示すように，以下のような性質を持っている領域として導入される．

- 電荷中性を満たすが，壁方向への密度減少がある．
- イオンの速度が音速になるだけの電位勾配が存在する．

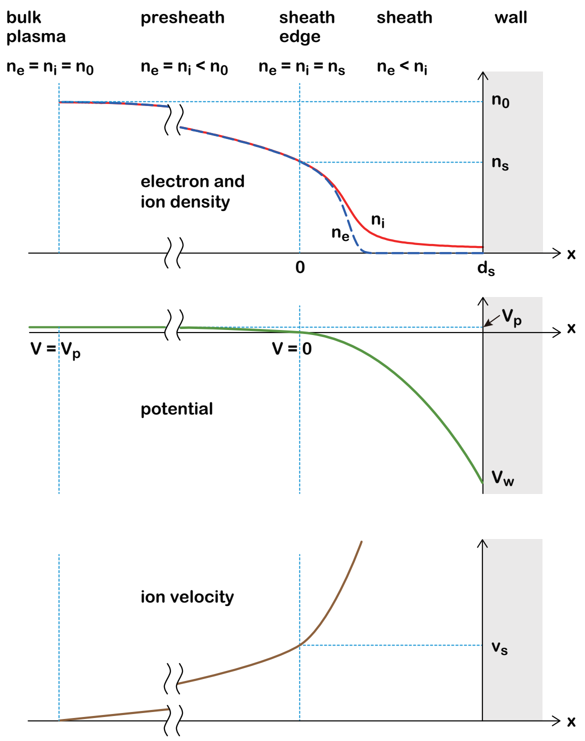

図 2.8 プレシースを考慮した壁近傍のプラズマとシースの様子．

なお，次節で Bohm 条件を導出するにあたり，ポテンシャルの取り方をシース端 ($x = 0$) でゼロになるような取り方としているので留意されたし．

2.5.3 Bohm 条件の導出

Bohm 条件の導出にあたって，前節で述べたプレシースの特性も含めて，以下の仮定をする．

- プレシース領域の荷電粒子密度は，両極性拡散によって壁方向に向かって減少するが，電荷中性 (正確には準中性) 状態は保たれている．即ち，電子密度を n_e，イオン密度を n_i とすると，$x \leq 0$ では，

$$n_e(x) = n_i(x) \tag{2.35}$$

  となる．
- 電子はバルクプラズマ，プレシース，シースの全ての領域において十分に熱平衡状態に達しており，その密度は Maxwell-Boltzmann 分布に従う．即ち，シース内の電子の密度は，シース内の電位を用いて次式で与えられる．

$$\begin{aligned} n_e(x) &= n_e(0)\exp\left(\frac{q_0 V(x)}{k_B T_e}\right) \\ &= n_s \exp\left(\frac{q_0 V(x)}{k_B T_e}\right) \\ &\approx n_s\left(1 + \frac{q_0 V(x)}{k_B T_e}\right). \end{aligned} \tag{2.36}$$

  n_s は，シース端でのプラズマ密度である．ここで，$V(x) < 0$ であることに注意されたし．この条件を後で使うことになる．
- イオンのフラックスは連続である (フラックスの保存則)．即ち，シース内部のイオンフラックスは，何処をとってもシース端から入ったときと同じである．これを式で書けば，$x > 0$ に対して，以下のよう表される．

$$n_i(x)v_i(x) = n_s v_s \tag{2.37}$$

  ここで，v_s は，シース端でのイオンの速度である．本節での主たる作業は，この v_s がある値 (それが Bohm 速度) 以上でないとちゃんとシースが形成されない，という結論を導くことである．
- シースに入る前と入った後のイオンのエネルギーはエネルギー保存則を満たす．これを式で書けば，$x > 0$ に対して，以下のように表される．

$$\frac{1}{2}M_i v_i(x)^2 + q_0 V(x) = \frac{1}{2}M_i v_s^2. \tag{2.38}$$

- シース中では，電子よりもイオンの方が数密度が大きい．即ち，$x > 0$ に対して，

$$n_i(x) \geq n_e(x). \tag{2.39}$$

  最終的には，この不等号が Bohm 条件に現れる不等号となる．

最後のところで述べたように，式 (2.39) の不等号がボーム条件の不等号であるから，n_i と n_e の関係を出すのが，ボーム条件を出すための具体的な作業となる．

電子密度 n_e については，式 (2.36) より，

$$n_e(x) = n_s\left(1 + \frac{q_0 V(x)}{k_B T_e}\right) \tag{2.40}$$

となる．

イオン密度 n_i については，式 (2.37) と式 (2.38) から $v_i(x)$ を消去すると，以下のように求められる．

$$n_i(x) = n_s\left(1 - \frac{2q_0 V(x)}{M_i v_s^2}\right)^{-1/2} \tag{2.41}$$

次に,「イオンが遅い」という性質を適用し，上式の近似式を作る．シース内部の軽い電子については，壁での消滅と壁への拡散によってその密度が電荷中性のバルクプラズマよりも小さくなっている．しかし，重たいイオンについては，動きが鈍いために，シース内部のイオン密度は，バルクプラズマと比較して，それほど大きく変化していないといえる．即ち，シース内のイオンの密度については,

$$n_\mathrm{i}(x) \approx n_\mathrm{s} \tag{2.42}$$

と見ることができる．従って，式 (2.41) において 1 からさっ引く項の大きさは，1 よりも十分小さいと見なし，$(1-\cdots)^{-1/2}$ を以下のようにテーラー展開の第 1 項で近似する．

$$n_\mathrm{i}(x) = n_\mathrm{s}\left(1+\frac{q_0 V(x)}{M_\mathrm{i} v_\mathrm{s}^2}\right) \tag{2.43}$$

電子密度 $n_\mathrm{e}(x)$ を表す式 (2.40) とイオン密度 $n_\mathrm{i}(x)$ を表す式 (2.43) に対して，シースの中ではイオン密度が電子密度よりも大きい ($n_\mathrm{i} \geq n_\mathrm{e}$) という式 (2.39) の条件を適用すると，次式を得る．

$$\frac{V(x)}{M_\mathrm{i} v_\mathrm{s}^2} \geq \frac{V(x)}{k_\mathrm{B} T_\mathrm{e}} \tag{2.44}$$

ここで, 最初に注意したように, シース内部では $V(x) < 0$ である．従って，$V(x)$ 以外の物理量に関する大小関係は，上式の不等号とは逆の関係にあることになる．多くの教科書では，このことを示すために，絶対値をとる，ということをしている[*14]．

$$\begin{aligned}\left|\frac{V(x)}{M_\mathrm{i} v_\mathrm{s}^2}\right| &\leq \left|\frac{V(x)}{k_\mathrm{B} T_\mathrm{e}}\right|,\\ \frac{|V(x)|}{M_\mathrm{i} v_\mathrm{s}^2} &\leq \frac{|V(x)|}{k_\mathrm{B} T_\mathrm{e}},\\ \frac{1}{M_\mathrm{i} v_\mathrm{s}^2} &\leq \frac{1}{k_\mathrm{B} T_\mathrm{e}}\end{aligned} \tag{2.45}$$

これより，v_s には以下の条件が課せられることになるということが導かれる．これが Bohm の条件である．

$$v_\mathrm{s} \geq \sqrt{\frac{k_\mathrm{B} T_\mathrm{e}}{M_\mathrm{i}}} \equiv v_\mathrm{B}. \tag{2.46}$$

*14 $-1 > -3$ ならば $1 < 3$ となることは理解できるであろう．

2.5.4 シース端の特徴的パラメータ

前節では，シース内部だけに注目し，Bohm の条件を導いた．ここでは，バルクプラズマからプレシースに至るまでのポテンシャルドロップや荷電粒子密度の減少について述べる．但し，ここで述べる理論は，プレシースにおいても無衝突を仮定していることに留意されたし．

ポテンシャルについては，バルクプラズマのポテンシャルから V_p だけ異なって (下がっている) いることになっている．Bohm の条件が満たされる場合の V_p の値は，エネルギー保存則；

$$\frac{1}{2} M_\mathrm{i} v_\mathrm{s}^2 = q_0 V_\mathrm{p} \tag{2.47}$$

における v_s が式 (2.46) で表される Bohm 速度 v_B になっているということから，次式で与えられる事になる．

$$V_\mathrm{p} = \frac{k_\mathrm{B} T_\mathrm{e}}{2 q_0}. \tag{2.48}$$

この式の T_e の単位を eV にすれば,

$$V_\mathrm{p} = \frac{T_\mathrm{e}\ [\mathrm{eV}]}{2}. \tag{2.49}$$

となる．即ち，プレシースでの電位降下は，電子温度の 1/2 ということになる．これまでに典型例としてあげた $T_\mathrm{e} = 3$ eV のプラズマであれば，プレシースでの電位降下は，1.5 V ということになる．イオンはこの電位差によって Bohm 速度まで加速されるのである．

次に，プラズマ密度について考察する．バルクプラズマとプレシースの領域では，電荷中性が保たれていることから，電子密度がそのままプラズマ密度となる．電子密度は，全ての領域において Maxwell-Boltzmann 分布に従っているから，バルクプラズマの電子密度が n_0，プレシースに至るまでのポテンシャルドロップが $-V_\mathrm{p}$ であるならば，シース端での電子密度 (即ち，プラズマ密度)n_s は，次式で与えられる．

$$n_\mathrm{s} = n_0 \exp\left(-\frac{q_0 V_\mathrm{p}}{k_\mathrm{B} T_\mathrm{e}}\right) = n_0 \mathrm{e}^{-1/2} = 0.61 n_0. \tag{2.50}$$

ここで，式 (2.48) の関係式を用いた．即ち，

> バルクプラズマの密度 n_0 に対して，シース端での電子密度 n_e，及びイオン密度 n_i は，$e^{-1/2} = 0.61$ 倍 (約 60%) となっている[*15]

*15 繰り返しになるが，この結論はあくまでもプレシースにおけるイオンが無衝突であることが前提となっていることに留意されたし．

のである．

2.5.5　壁の浮遊電位

プラズマ中に物体を挿入した場合，その物体が接地されていなければ，シース形成の理屈に従って負に帯電することになる．こうした状況は，プラズマ中で物体の表面処理をするときなどに生じる状況である．*16

前節にて壁に向かうイオンのフラックスを求めるために必要なシース端でのイオン密度と速度が与えられた．電子についても同様に，その密度と速度がわかる．そうすると，正と負の荷電粒子が壁に向かってどれだけ流れ込むのかがわかる．すると，壁がどれだけ帯電するのかがわかる．もちろん，壁が接地されていれば，壁の電位は常に 0 V であるが，接地されていない場合には，イオンフラクスによる正への帯電と電子フラックスによる負への帯電が釣り合うような帯電量になる．

先に述べたようなプラズマ中に物体を挿入したときの状況が接地されていない壁と同じ状況となる．負への帯電が大きければ，イオンのフラックスは大きいものとなる．イオンに比べてその質量が無視できる負の電荷（電子）がやってきても物体にはあまり物理的な影響はないが，質量が大きいイオンが来た場合には，その数や速度によっては，物体に物理的な影響を及ぼす．従って，その物体がプラズマに対してどれくらいの電位になるのか，ということを知ることは極めて重要なことなのである．

以下では，接地されていない壁がプラズマと接している場合における壁の電位を表す式を以下の段階を追って導出する．即ち，イオンのフラックスからイオン電流を出し，電子のフラックスから電子電流を出す．壁に流れ込む電流はこれらの電流の和であるが，電気的に浮いている壁の場合，定常状態ではこの電流はゼロになる．この電流がゼロになるという条件から，フローティングポテンシャルが決定される．

(1) 壁へのイオンフラックス

壁への正イオンフラックスは，フラックスの保存則から，シース端でのフラックスと同じはずである．従って，式 (2.50) で表されるシース端でのイオン密度 $n_\mathrm{i} = n_\mathrm{s} = \mathrm{e}^{-1/2} n_0$ と，式 (2.46) で与えられるシース端でのイオンの速度 (Bohm 速度) $v_\mathrm{s} = v_\mathrm{B}$ を用いて，次式で与えられる．

$$\Gamma_\mathrm{i} = n_\mathrm{s} v_\mathrm{s} = n_0 \mathrm{e}^{-1/2} v_\mathrm{B} = 0.61 n_0 \sqrt{\frac{k_\mathrm{B} T_\mathrm{e}}{M_\mathrm{i}}} \tag{2.51}$$

このフラックスを **Bohm フラックス**という．この Bohm フラックスの式を見ると，壁へのイオンのフラックスは，壁の電位には依存していない，ということがわかる．即ち，プラズマ密度 n_0，電子温度 T_e，及びイオンの質量 M_i のみで決まっているのである．

(2) 壁への電子のフラックス

壁に向かう電子フラックスも，壁に向かう電子の速度とその速度を有する電子の密度の積として表される．壁に向かう電子の速度は，熱運動でランダムな方向を持っている電子の速度のうち，壁に向かう方向の成分だけを考慮したものとなる．その平均値は，Maxwell-Boltzmann 分布に従って熱運動をしている電子の平均速度 (全方向の速度を考慮したときの平均値)$\langle v_\mathrm{e} \rangle$ を用いて次のように表すことができる (導出は課題).

$$\frac{1}{4} \langle v_\mathrm{e} \rangle \tag{2.52}$$

なお，$\langle v_\mathrm{e} \rangle$ は，次式で与えられる (導出は課題).

$$\langle v_\mathrm{e} \rangle = \left(\frac{8 k_\mathrm{B} T_\mathrm{e}}{\pi m_\mathrm{e}} \right)^{1/2} \tag{2.53}$$

従って，電子の密度が n_0 であれば，壁に向かう電子のフラックスは，次式で与えられることになる．

$$\frac{1}{4} n_0 \langle v_\mathrm{e} \rangle \tag{2.54}$$

但し，壁に入り込むフラックスは，このうち，壁の電位 V_w を超えられるものだけである．全電子密度 n_0 のうち，ポテンシャル V_w 以上のエネルギーを持っている電子の密度は，ボルツマン因子を用いて，次式で表される．

$$n_0 \exp\left(\frac{q_0 V_\mathrm{w}}{k_\mathrm{B} T_\mathrm{e}} \right) \tag{2.55}$$

従って，フラックスを表す n_0 を上式で置き換えたものが，壁の電位 V_w を超えて壁に入り込むフラックスということになり，次式で表される．

$$\begin{aligned} \Gamma_\mathrm{e} &= \frac{1}{4} n_0 \langle v_\mathrm{e} \rangle \exp\left(\frac{q_0 V_\mathrm{w}}{k_\mathrm{B} T_\mathrm{e}} \right) \\ &= \frac{1}{4} n_0 \left(\frac{8 k_\mathrm{B} T_\mathrm{e}}{\pi m_\mathrm{e}} \right)^{1/2} \exp\left(\frac{q_0 V_\mathrm{w}}{k_\mathrm{B} T_\mathrm{e}} \right). \end{aligned} \tag{2.56}$$

*16 接地されていない状況が意図して作られた状況なのか，それとも意図せずにそうなってしまったのかによって，物体が負に帯電することが良いことになったり，困ったことになったりする．

(3) 電流ゼロの条件適用

壁に入る電流は，イオン電流と電子電流の和である．従って，壁に入る電流密度は，前節までで求めたイオンフラックスと電子フラックスを用いて，次式で表されることになる．

$$J = q_0(\Gamma_\mathrm{i} - \Gamma_\mathrm{e}) \tag{2.57}$$

壁が電気的に浮いている場合には，$J = 0$，即ち，$\Gamma_\mathrm{i} = \Gamma_\mathrm{e}$ となる．この条件を満たす壁の電位 V_w を**浮遊電位 (floating potential)** といい，floating の頭文字をとって V_f と表されることが多い．

以下ではこの浮遊電位 V_f を表す式を求めてみよう．Bohm フラックスを表す式 (2.51)，壁に入り込むことのできる電子のフラックスを表す式 (2.56)，及び $J = 0$ の条件において，V_w を V_f とすれば，次式を得る．

$$\exp\left(-\frac{1}{2}\right)\sqrt{\frac{k_\mathrm{B}T_\mathrm{e}}{M_\mathrm{i}}} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{8k_\mathrm{B}T_\mathrm{e}}{\pi m_\mathrm{e}}}\exp\left(\frac{q_0 V_\mathrm{f}}{k_\mathrm{B}T_\mathrm{e}}\right) \tag{2.58}$$

この式を $V_\mathrm{f} =$ の形に変形すれば，次式のようになる．

$$V_\mathrm{f} = -\frac{k_\mathrm{B}T_\mathrm{e}}{2q_0} - \frac{k_\mathrm{B}T_\mathrm{e}}{2q_0}\ln\left(\frac{1}{2\pi}\frac{M_\mathrm{i}}{m_\mathrm{e}}\right) \tag{2.59}$$

上式の第 1 項とプレシースの電圧降下を表す式 (2.48) とを比較するとわかるように，これらは同じ式で表されている．即ち，浮遊電位を表す上式の第 1 項は，プレシースによる電圧降下の成分を表していることになる．従って，残りの第 2 項は，シース本体による電圧降下の成分を表していることになる．$T_\mathrm{e} = 3$ eV のアルゴンプラズマの場合について具体的に計算してみると，

$$第 1 項 = -\frac{k_\mathrm{B}T_\mathrm{e}}{2q_0} = -1.5\ \mathrm{V} \tag{2.60}$$

$$第 2 項 = -\frac{k_\mathrm{B}T_\mathrm{e}}{2q_0}\ln\left(\frac{1}{2\pi}\frac{M_\mathrm{i}}{m_\mathrm{e}}\right) = -14\ \mathrm{V} \tag{2.61}$$

となる．従って，バルクプラズマから見た壁のポテンシャルは，約 16 V 低い電位となる．

なお，上記の導出過程では，導出過程を簡単化するためにバルクプラズマの電位をゼロとしているが，実際のプラズマの場合には，バルクプラズマの電位は，接地電位 (0 V) よりも高い電位にある．この電位はプラズマポテンシャルと呼ばれており，V_p と表されることが多い．このような場合には，前節までの導出過程における基準電位が 0 V ではなく，V_p になる．従って，前節で求めたフローティングポテンシャルの式 (2.59) は，壁の電位 V_w が V_p からどれだけ電位降下しているかを表す式である，ととらえておく必要がある．即ち，プラズマポテンシャルが V_p で与えられるプラズマと接する無接地の壁の電位 V_w は，次式で与えられることになる．

$$V_\mathrm{w} = V_\mathrm{p} + V_\mathrm{f} \tag{2.62}$$

ここで，V_p からの電位降下分 (引き算される分) である V_f が足し算で表現されている．この理由は，V_f 自身が負であるからである．

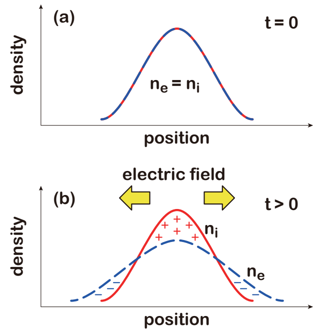

図 2.9 両極性拡散を説明するための概念図．

2.6 両極性拡散

拡散とは，熱運動している粒子が密度の高いところから密度の低いところ輸送される現象である．プラズマ中の電子とイオンの輸送についても，濃度差があれば拡散による電子やイオンの輸送が生じる．例えば，**図 2.9**(a) に示すように，$t = 0$ でプラズマ状態になっている空間 (プラズマ空間と呼ぶことにする) の両脇にそうでない空間 (非プラズマ空間と呼ぶことにする) があったとしよう．非プラズマ空間側には，電子が存在しないので，プラズマ空間の端部の電子は非プラズマ状態の方へ拡散しようとする．また，非プラズマ空間側には，イオンも存在していないので，プラズマ空間の端部のイオンは非プラズマ空間の方へ拡散しようとする．

このとき，プラズマであるが故に起こる追加現象がある．即ち，プラズマは，相異なる電荷を有し，質量が大幅に異なる電子と正イオンで構成されている，ということが原因となって起こる現象であり，**両極性拡散 (ambipolar diffusion)** と呼ばれている．

プラズマを構成する電子と正イオンの内，電子は軽いため，イオンよりも先に遠方へ拡散しようとする．従って，**図 2.9**(b) に示すように，電子だけが先に到達した非プラズマ領域の電位は拡散前よりもマイナス側に偏る．

一方，$t=0$ でプラズマ空間であった部分は，$t>0$ では，遅いイオンが取り残された状態となり，その領域の電位は拡散前よりもプラス側に偏る．すると，やや遠方に行った電子と残されたイオンの間で電場が発生する．この電場は，遠方に行こうとする電子を引き戻す力を電子に及ぼす．一方，イオンにとっては，この力はイオンを遠方に行こうとしている電子の方に引き寄せる力となる．従って，この電界によって，電子は減速され，イオンは加速される，ということになる．その結果，定常状態では，電子とイオンは同じ速度で移動することになるのである．このような現象を**両極性拡散 (ambipolar diffusion)** と呼んでいる．

以下では，この両極性拡散という視点で電子とイオンの輸送を見たときの拡散係数が，如何なる表式になるのかを示す．簡単化のために x 方向だけを考えた一次元モデルで説明する．

電子とイオンの輸送が電場によるドリフトと濃度勾配による拡散だけで支配されているとすると，電子とイオンのフラックス Γ_e，Γ_i は次式で与えられる．

$$\Gamma_\mathrm{e} = -n_\mathrm{e}\mu_\mathrm{e}E - D_\mathrm{e}\frac{\partial n_\mathrm{e}}{\partial x}, \tag{2.63}$$

$$\Gamma_\mathrm{i} = n_\mathrm{i}\mu_\mathrm{i}E - D_\mathrm{i}\frac{\partial n_\mathrm{i}}{\partial x}. \tag{2.64}$$

プラズマ中では，電荷中性が成り立っているが，上述のような輸送が十分に起こってしまうと，端部では電荷中性は成り立たないことになる．ここでは，多少勝手であるが，輸送が開始してもまだ電荷中性を仮定しても問題無い程度の初期段階に限定することにする．

$$n_0 = n_\mathrm{e} = n_\mathrm{i} \tag{2.65}$$

従って，電子とイオンのフラックスは，次式のようになる．

$$\Gamma_\mathrm{e} = -n_0\mu_\mathrm{e}E - D_\mathrm{e}\frac{\partial n_0}{\partial x}, \tag{2.66}$$

$$\Gamma_\mathrm{i} = n_0\mu_\mathrm{i}E - D_\mathrm{i}\frac{\partial n_0}{\partial x}. \tag{2.67}$$

上式では，電子と正イオンの輸送フラックスは電場によるドリフトと濃度勾配による拡散によって表されている．両極性拡散の描像では，これらの内，電場によるドリフトの効果を拡散係数の方に押し込めているということができる．この両極性拡散という描像でプラズマ中の粒子の輸送を見た場合，電子と正イオンは先述のように同じように拡散することになるので，$\Gamma_\mathrm{e}=\Gamma_\mathrm{i}$ となる．これを $\Gamma_\mathrm{a}(=\Gamma_\mathrm{e}=\Gamma_\mathrm{i})$ と表すとすると，次のような関係が成り立つ．

$$\Gamma_\mathrm{i} + \Gamma_\mathrm{e} = 2\Gamma_\mathrm{a}, \tag{2.68}$$

$$\Gamma_\mathrm{i} - \Gamma_\mathrm{e} = 0 \tag{2.69}$$

これに先のフラックスの表式を代入すると，次式を得る．

$$2\Gamma_\mathrm{a} = n_0(\mu_\mathrm{i}-\mu_\mathrm{e})E - (D_\mathrm{i}+D_\mathrm{e})\frac{\partial n_0}{\partial x}, \tag{2.70}$$

$$0 = n_0(\mu_\mathrm{i}+\mu_\mathrm{e})E - (D_\mathrm{i}-D_\mathrm{e})\frac{\partial n_0}{\partial x}. \tag{2.71}$$

この二つの式から E を消去すると，

$$\Gamma_\mathrm{a} = -D_\mathrm{a}\frac{\partial n_0}{\partial x} \tag{2.72}$$

なる拡散方程式が導かれることになる．この D_a を，プラズマ中の電子と正イオンの輸送過程を両極性拡散という描像で捉えたときの**両極性拡散係数**と呼んでいる．先の二つの式から E を消去すればわかるように，D_a は次式で与えられる．

$$D_\mathrm{a} = -\frac{\mu_\mathrm{i}D_\mathrm{e}+\mu_\mathrm{e}D_\mathrm{i}}{\mu_\mathrm{i}+\mu_\mathrm{e}} \tag{2.73}$$

ここで，移動度 μ と拡散係数 D の間に，

$$\mu_\mathrm{e} = \frac{q_0}{k_\mathrm{B}T_\mathrm{e}}D_\mathrm{e}, \tag{2.74}$$

$$\mu_\mathrm{i} = \frac{q_0}{k_\mathrm{B}T_\mathrm{i}}D_\mathrm{i} \tag{2.75}$$

なるアインシュタインの関係式が成り立つことを利用して D_a を表す式から μ_e，μ_i を消去すると，

$$D_\mathrm{a} \approx \left(\frac{T_\mathrm{e}}{T_\mathrm{i}}+1\right)D_\mathrm{i} \tag{2.76}$$

となる．ここで，通常は，質量の軽い電子の方が質量の重たい正イオンよりも温度が高い (運動エネルギーが高い) から，$T_\mathrm{e}/T_\mathrm{i} \gg 1$ である．従って，

$$D_\mathrm{a} \approx \frac{T_\mathrm{e}}{T_\mathrm{i}}D_\mathrm{i} \tag{2.77}$$

となる．この式から，プラズマの中の粒子，即ち電子と正イオンは，イオンの拡散係数の $T_\mathrm{e}/T_\mathrm{i}$ 倍の拡散係数を持つことがわかる．

参考までに，幾つかのイオンの両極性拡散係数の具体的な数値を，中性の時の拡散係数，及び両極性ではない普通の拡散係数とあわせて**表 2.1** に示した [4].

表 2.1 300 K, 1 Torr における同種ガス中の中性種の拡散係数 D，イオン種の拡散係数 D_i，及びプラズマ中での両極性拡散係数 D_a [4].

気体	D (cm^2/s)	D_i (cm^2/s)	D_a (cm^2/s)
He	1,200	380	540
Ar	140	47	150
H_2	1,120	98	600
N_2	160	23	150
O_2	160	21	110

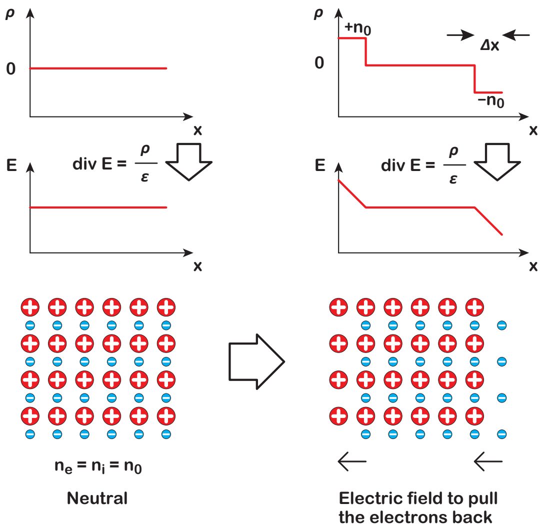

図 2.10 プラズマ振動の周波数を導出するための仮想的なプラズマの模式図.

2.7 プラズマ振動とプラズマ周波数

図 2.10 に示すように一次元空間にプラズマがあったとする．そのプラズマ中の電子の集団が元の位置からずれたとする．すると，もともと電子とイオンが同じところに等量居たわけだから，イオンだけがそこに取り残されることになる．正のイオンの集合体と負の電子の集合体が空間的に分離した状態ができるわけであるから，Coulomb 力でお互いが引き寄せられることになる．イオンは重たいので，動きにくい．従って，電子がもとに位置に引き戻されることになる．電子が何とも衝突しなければ，慣性によって，戻ろうとしたもとの位置を通り過ぎてしまう．行き過ぎてしまうと，上記のずれた状態と同じになる．これが繰り返される．これを**プラズマ振動 (plasma oscilation)** という．プラズマ振動の角周波数は，次式で与えられ，**プラズマ周波数 (plasma frequency)** と呼ばれている．

$$\omega_p = \sqrt{\frac{n_0 q_0^2}{\varepsilon_0 m_e}} \tag{2.78}$$

正しくは，プラズマ角周波数と呼ぶべき物理量であるが，「角」を省略して言及されている場合が多い．また，数値で示す場合には，一般には，2π で割った普通の周波数で表すことが多い．

プラズマ周波数はプラズマ密度のみによって決まるため，実用公式として以下の式がしばしば利用されている．

$$f_p = 9{,}000\sqrt{n_0} \tag{2.79}$$

エッチングなどに用いられる高密度プラズマの場合について計算してみると，次のようになる．

プラズマ密度 $n_0 = 10^{11} \sim 10^{13}$ cm^{-3}
プラズマ周波数 $f_p = 3$ GHz ~ 30 GHz

即ち，プラズマは GHz 帯域の電磁波と相互作用する，ということがわかる．

2.8 イオン音波 (イオン波)

何かの原因でイオンの集団がもとの位置からずれたとする．すると，Debye 遮蔽の原理と同じように，新たな場所に移動してきた正電荷の周りに電子が集まり，Debye 遮蔽が起こる．Debye 遮蔽が完璧であれば，イオンが動いても，電子も同時に同じように動くので，見た目に変化はない．しかし，実際には，電子の運動には，ランダムな熱運動が重畳しているため，Debye 遮蔽が完璧ではなくなる．即ち，電子とイオンの分布にずれが生じる．そのため，このような電子とイオンの分布のずれた部分が，イオンの移動とともに移動することになる．これを**イオン音波 (ion acoustic wave)** といい，その伝播速度は，次式で与えられる．[*17]

$$c_s = \sqrt{\frac{k_B T_e}{M_i}}. \tag{2.80}$$

右辺は，既に，Bohm のシース条件においても現れていたことを思い出して欲しい．$T_e = 1$ eV のプラズマで，

[*17] イオン音波は，単に，イオン波と呼ばれることもある．

アルゴンイオンの場合には，c_{s} は，既に計算したように，1,600 m/s となる．

課題

課題

プラズマ周波数を表す式を導出せよ．

略解

簡単のために**図 2.10** に示すような一次元空間に存在するプラズマを想定する．図 (a) に示すように区間 AB の間だけにプラズマが存在したとして，そのプラズマ中の電子が図 (b) のようにように右に Δx だけずれたとする．このずれによって，発生する電場 E は，次式で与えられる．

$$E = \frac{q_0 n_0 \Delta x}{\varepsilon_0} \tag{2.81}$$

この電場は，ずれた電子をもとの位置に引き戻そうつする力を電子に及ぼす．この描像を運動方程式で表すと，次式のようになる．

$$m_\mathrm{e}\frac{\mathrm{d}^2\Delta x}{\mathrm{d}t^2} = -q_0 E = -\frac{q_0^2 n_0}{\varepsilon_0}\Delta x \tag{2.82}$$

この微分方程式は，

$$\frac{\mathrm{d}^2\Delta x}{\mathrm{d}t^2} = -\omega_\mathrm{p}^2\ \Delta x \tag{2.83}$$

という単振動を表す微分方程式になっており，その解は，

$$\Delta x = A\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_\mathrm{p} t} \tag{2.84}$$

で与えられる．ここで，ω_p が単振動の角周波数であり，求めるべきプラズマ周波数ということになる．従って，プラズマ周波数は，

$$\omega_\mathrm{p} = \sqrt{\frac{q_0^2 n_0}{m_\mathrm{e}\varepsilon_0}} \tag{2.85}$$

となる．

課題

イオン音波を表す式を導出せよ．

略解

イオン音波とは，プラズマ中の電荷密度の粗密が遠方に輸送されるという粗密波である．

イオンの速度を v_i とすると，電場 E が存在する空間中でのイオンの運動方程式は，次式のようになる．

$$M_\mathrm{i}\frac{\partial v_\mathrm{i}}{\partial t} = q_0 E \tag{2.86}$$

イオンの密度 n_i は，次式で示される粒子連続の式を満たす．

$$\frac{\partial n_\mathrm{i}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(n_\mathrm{i} v_\mathrm{i}) = 0 \tag{2.87}$$

電子の密度については，次式で示されるボルツマンの関係式によって与えられるものとする．

$$n_\mathrm{e} = n_\mathrm{e0}\exp\left(\frac{q_0 V}{k_\mathrm{B} T_\mathrm{e}}\right) \tag{2.88}$$

ここで，電場 E とポテンシャル V の間には，以下の関係がある．

$$E = -\frac{\partial V}{\partial x} \tag{2.89}$$

ここで，電子とイオンの密度を振動するものと振動しないものに区別して表しておこう．

$$n_\mathrm{i} = n_\mathrm{i0} + n_\mathrm{iw}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - kx)}, \tag{2.90}$$

$$n_\mathrm{e} = n_\mathrm{e0} + n_\mathrm{ew}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - kx)} \tag{2.91}$$

ここで，k は x 方向に伝播する波の波数である．イオンの速度 v_i，ポテンシャル V，電場 E についても，振動を考慮すると，

$$v_\mathrm{i} = v_\mathrm{iw}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - kx)}, \tag{2.92}$$

$$V = V_\mathrm{w}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - kx)}, \tag{2.93}$$

$$E = E_\mathrm{w}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - kx)} \tag{2.94}$$

となる．

これらを用いると，先のイオンの運動方程式は，次式のようになる．

$$\mathrm{j}\omega M_\mathrm{i} v_\mathrm{iw} = q_0 E_\mathrm{w} \tag{2.95}$$

粒子保存の式において，$v_\mathrm{i0} = 0$，即ち，定常的なイオンの流れが無い場合には，次のように書くことができる．

$$\frac{\partial n_\mathrm{i}}{\partial t} + n_\mathrm{i0}\frac{\partial v_\mathrm{i}}{\partial x} = 0 \tag{2.96}$$

この式の波動分については，次式が成り立つ．

$$\mathrm{j}\omega n_\mathrm{iw} - \mathrm{j}k n_\mathrm{i0} v_\mathrm{iw} = 0 \tag{2.97}$$

波動成分が $k_\mathrm{B} T_\mathrm{e}/q_0$ よりも十分に小さい場合を考えると，電子の密度を表すボルツマンの関係式は，テー

ラー展開の第 1 項だけを取り出して，以下のように近似することができる．

$$n_{\mathrm{e}} = n_{\mathrm{e0}} - \frac{n_{\mathrm{e0}} q_0 V_{\mathrm{w}}}{k_{\mathrm{B}} T_{\mathrm{e}}} \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - kx)} \tag{2.98}$$

従って，

$$n_{\mathrm{ew}} = \frac{n_{\mathrm{e0}} q_0 V_{\mathrm{w}}}{k_{\mathrm{B}} T_{\mathrm{e}}} \tag{2.99}$$

となる．

電場とポテンシャルの関係式も次式のようになる．

$$E_{\mathrm{w}} = \mathrm{j} k V_{\mathrm{w}} \tag{2.100}$$

これまでの式を波動成分のいずれかについて整理し，それがゼロでないとする．その際，電子密度の波動成分とイオンの波動成分が等しいという準中性近似を適用する．変動がゆっくりしていて，波長が Debye 長よりも十分に長い場合には，電荷中性が成り立っているとしてもよい．結局，波動成分の係数がゼロになるという条件から，次式が導かれる．

$$\left(\frac{\omega}{k}\right)^2 = \frac{k_{\mathrm{B}} T_{\mathrm{e}}}{M_i} \tag{2.101}$$

これは，イオン音波の分散式になっている．即ち，波数と周波数の間の関係を決める式である．右辺の括弧内はこの波動の群速度を表す．従って，イオン音波の速度を c_{s} とすれば，

$$\frac{\omega}{k} = \pm c_{\mathrm{s}} \tag{2.102}$$

となる．

即ち，イオン音波は，イオンの慣性と電子温度で決まっている．イオン音波の伝播においては，イオン密度と電子密度の波動分はほぼ同じであり，その粗密波がプラズマ中を伝播してゆく．大気中の音波の場合も，その伝播速度は，

$$\left(\frac{\gamma p}{\rho}\right)^{1/2} = \left(\frac{\gamma k T}{M}\right)^{1/2} \tag{2.103}$$

と表される．ここで，γ は比熱比，p は圧力，ρ は質量密度である．イオン音波の場合，慣性は電子に比べて思いイオンの質量が決定し，

$$\rho = n_{\mathrm{i}} M_{\mathrm{i}} \tag{2.104}$$

である．イオン密度の高い所に電子も集まるが，そうすると電子の圧力によって広がろうとして電場を発生し，イオンをも引っ張る．イオンは慣性があるので，電場による加速で行きすぎてしまい，再び粗密が現れる．このようなことを繰り返すことで波が伝わる．復元力である電子の圧力は，$n_{\mathrm{e}} k_{\mathrm{B}} T_{\mathrm{e}}$ である．

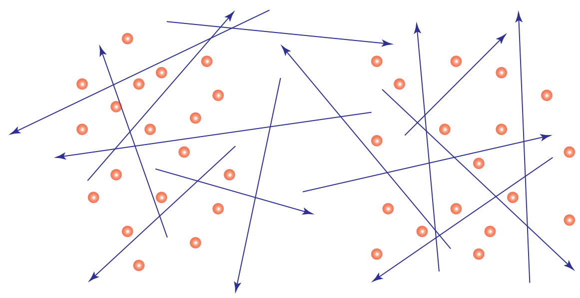

図 2.11 イオン音波におけるイオン（◯）と電子（⟶）．電子は高速で運動していてイオン密度の粗密に伴って生成される電場を完全には打ち消すことができない．

課題

熱平衡状態にある電子の平均エネルギー $\langle\epsilon\rangle$ が

$$\langle\epsilon\rangle = \frac{3}{2} k_{\mathrm{B}} T_{\mathrm{e}}$$

で与えられることを示せ．ここで，T_{e} は電子温度である．

略解

三次元空間では，電子は x, y, z 方向の速度成分をもつ．そのため，運動エネルギーとその平均値も各成分毎に求めることになる．結果的には，どの成分についても同様の説明となるため，前半では x 成分についてのみ述べ，最後に三成分を一度に考慮した場合について述べる．

ある一つの電子が x 方向について速度 v_x で運動しているとき，その運動エネルギーは，次式で与えられる．

$$\epsilon_x = \frac{1}{2} m_{\mathrm{e}} v_x^2 \tag{2.105}$$

全ての電子が同じ速度であれば，平均値もこのエネルギーでよい．しかし，個々の電子が別々の速度を持っている場合，ある運動エネルギーをもっている電子の比率はどれくらいか，という確率を考慮して平均化することになる．「確率を考慮して平均化」を具体的に表現すると，運動エネルギーとその運動エネルギーを持つ確率をかけ算したものを全部足し算するということであり，確率論の期待値のようなものである．

なお，運動エネルギーを表す式において，v_x に依存するのは v_x^2 だけであるから，運動エネルギーの平均値を求めるには，v_x^2 の平均値 $\langle v_x^2\rangle$ を求め，次式で平均エネルギーを表す，ということになる．

$$\langle\epsilon_x\rangle = \frac{1}{2}m_\mathrm{e}\langle v_x^2\rangle \tag{2.106}$$

では，実際に，$\langle v_x^2\rangle$ を求めてみよう．電子が熱平衡状態にある場合には，電子がある速度を持つ確率密度関数 (これを速度分布関数という) は，次式で与えられる．

$$f(v_x) = \left(\frac{m_\mathrm{e}}{2\pi k_\mathrm{B}T_\mathrm{e}}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{m_\mathrm{e}v_x^2}{2k_\mathrm{B}T_\mathrm{e}}\right). \tag{2.107}$$

この分布を Maxwell-Boltzmann 分布と呼んでいる．これは確率密度関数なので，v_x と $v_x + \mathrm{d}v_x$ の間に速度がある確率は，$f(v_x)$ そのものではなく，$f(v_x)\,\mathrm{d}v_x$ で与えられることに注意して欲しい．確率密度関数に含まれている指数関数の前の係数は，規格化係数である．確率密度関数は，全ての確率を足し算したら (積分したら)1 になるべき関数であるから，積分したら丁度 1 になるようにこのようなややこしい係数が前に付いている．

確率 $f(v_x)\,\mathrm{d}v_x$ で分布している物理量の平均値を求めたければ，その物理量と $f(v_x)\,\mathrm{d}v_x$ をかけ算したものを，全ての v_x について足し算すればよい．物理量が連続的に変化する場合には，足し算が積分になる．我々は，v_x^2 の平均値を求めようとしているのであるから，次式を計算することになる．

$$\begin{aligned}\langle v_x^2\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 f(v_x)\,\mathrm{d}v_x \\ &= \left(\frac{2m_\mathrm{e}}{\pi k_\mathrm{B}T_\mathrm{e}}\right)^{1/2}\int_0^{\infty} v_x^2\exp\left(-\frac{m_\mathrm{e}v_x^2}{2k_\mathrm{B}T_\mathrm{e}}\right)\,\mathrm{d}v_x \\ &= \frac{k_\mathrm{B}T_\mathrm{e}}{m_\mathrm{e}}\end{aligned} \tag{2.108}$$

ここで，以下の積分公式を用いた．

$$\int_0^{\infty} x^2 \mathrm{e}^{-ax^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4a}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \tag{2.109}$$

従って，x 方向の運動エネルギーの平均値は，次式のようになる．

$$\langle\epsilon_x\rangle = \frac{1}{2}m_\mathrm{e}\langle v_x^2\rangle = \frac{1}{2}k_\mathrm{B}T_\mathrm{e} \tag{2.110}$$

次に，y，z 方向についても考慮しよう．その際，熱平衡状態にある電子の速度は等方的であり，x, y, z の三方向の成分を区別することはできず，三つの成分は相互に等しい，ということを知っている必要がある．この条件により，

$$\langle v^2\rangle = \langle v_x^2\rangle + \langle v_y^2\rangle + \langle v_z^2\rangle \tag{2.111}$$

$$\langle v_x^2\rangle = \langle v_y^2\rangle = \langle v_y^2\rangle \tag{2.112}$$

となる．従って，x，y，z の三成分を全て考えに入れたときの電子のエネルギーの平均値は，

$$\begin{aligned}\langle\epsilon\rangle &= \frac{1}{2}m_\mathrm{e}\langle v^2\rangle \\ &= \frac{1}{2}m_\mathrm{e}\langle v_x^2\rangle + \frac{1}{2}m_\mathrm{e}\langle v_y^2\rangle + \frac{1}{2}m_\mathrm{e}\langle v_z^2\rangle\end{aligned} \tag{2.113}$$

ここで，x，y，z の方向の運動エネルギーの平均値は，x 方向の運動エネルギーの平均値の導出過程から容易にわかるように，全て同じになる．即ち，

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}m_\mathrm{e}\langle v_x\rangle &= \frac{1}{2}k_\mathrm{B}T_\mathrm{e}, \\ \frac{1}{2}m_\mathrm{e}\langle v_y\rangle &= \frac{1}{2}k_\mathrm{B}T_\mathrm{e}, \\ \frac{1}{2}m_\mathrm{e}\langle v_z\rangle &= \frac{1}{2}k_\mathrm{B}T_\mathrm{e},\end{aligned} \tag{2.114}$$

従って，三次元的に考えたときのエネルギーの平均値は，

$$\langle\epsilon\rangle = \frac{3}{2}k_\mathrm{B}T_\mathrm{e} \tag{2.115}$$

となる．

なお，この導出過程から気づくと思うが，熱平衡にある粒子の運動エネルギーは，自由度毎に $k_\mathrm{B}T_\mathrm{e}/2$ なるエネルギーを持つ，ということになる．これを，「エネルギーの等分配則」と呼んでいる．

課題

速さ (速度の大きさ) の平均値を表す式

$$\langle v\rangle = \sqrt{\frac{8k_\mathrm{B}T_\mathrm{e}}{\pi m_\mathrm{e}}} \tag{2.116}$$

を導出せよ．

略解

先述の課題にて v^2 の平均値 $\langle v^2\rangle$ を求めたが，ここでは，v の平均値をだしてみよう．

そのためには，速度の大きさ，即ち，速さ $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ の分布関数 $F(v)$ を知っておく必要がある．v_x, v_y, v_z に関する速度分布関数が先述の Maxwell-Boltzmann 分布の関数で表されることを利用すると，

$F(v)$ を導出することができる．これは，(x, y, z) の直角座標系の積分を (r, θ, ϕ) の極座標系の積分に変換することで導出することができる．その導出を行うと，速さが v と $v + \mathrm{d}v$ の間にある確率密度関数は，以下のように表される．

$$F(v) = \left(\frac{m_{\mathrm{e}}}{2\pi k_{\mathrm{B}} T_{\mathrm{e}}}\right)^{3/2} 4\pi v^2 \exp\left(-\frac{m_{\mathrm{e}} v^2}{2k_{\mathrm{B}} T_{\mathrm{e}}}\right). \tag{2.117}$$

これを用いると，電子の熱運動による速さの平均値は，次式で与えられることがわかる．

$$\langle v \rangle = \int_0^\infty v F(v)\,\mathrm{d}v = \sqrt{\frac{8k_{\mathrm{B}} T_{\mathrm{e}}}{\pi m_{\mathrm{e}}}} \tag{2.118}$$

課題

速度が等方的であるときの速さの分布関数

$$F(v) = \left(\frac{m_{\mathrm{e}}}{2\pi k_{\mathrm{B}} T_{\mathrm{e}}}\right)^{3/2} 4\pi v^2 \exp\left(-\frac{m_{\mathrm{e}} v^2}{2k_{\mathrm{B}} T_{\mathrm{e}}}\right). \tag{2.119}$$

を導出せよ．

略解

三方向を考慮した速度分布関数は，一方向の速度分布関数の積で与えられる (確率の積)．従って，分布関数は次式で与えられる．

$$f(v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{m_{\mathrm{e}}}{2\pi k_{\mathrm{B}} T_{\mathrm{e}}}\right)^{3/2} \mathrm{e}^{-\frac{m_{\mathrm{e}}}{2k_{\mathrm{B}} T_{\mathrm{e}}}\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right)} \tag{2.120}$$

これを以下の要領で極座標形式に変換し，速さ $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ に対する分布関数に書き直す作業を行う．

直角座標系と極座標系の関係から，次式が成り立つ．

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2, \tag{2.121}$$

$$v_x = v \sin\theta \cos\phi, \tag{2.122}$$

$$v_y = v \sin\theta \sin\phi, \tag{2.123}$$

$$v_z = v \cos\theta \tag{2.124}$$

積分時の体積要素は，直角座標系では，

$$\mathrm{d}v_x\, \mathrm{d}v_y\, \mathrm{d}v_z \tag{2.125}$$

であるのに対し，極座標系では，

$$\mathrm{d}v\, (v \sin\theta \mathrm{d}\phi)\, (v \mathrm{d}\theta) = v^2\, \sin\theta\, \mathrm{d}v\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\phi \tag{2.126}$$

となる．

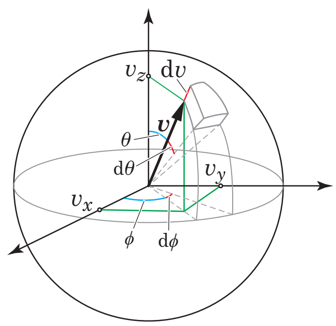

図 2.12 直角座標系と極座標系の関係．

従って，

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(v_x, v_y, v_z)\, \mathrm{d}v_x \mathrm{d}v_y \mathrm{d}v_z \\
&= \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(v, \theta, \phi)\, v^2 \sin\theta \mathrm{d}v \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi \\
&= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin\theta\, \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi \int_0^\infty f(v) v^2\, \mathrm{d}v \\
&= \int_0^\infty 4\pi f(v) v^2\, \mathrm{d}v \\
&= \int_0^\infty F(v)\, \mathrm{d}v
\end{aligned} \tag{2.127}$$

ここで，速度が等方的である場合には f が方向によらないため，v だけの関数となることを利用した．

これより，速さ v に対する分布関数が，

$$F(v) = \left(\frac{m_{\mathrm{e}}}{2\pi k_{\mathrm{B}} T_{\mathrm{e}}}\right)^{3/2} 4\pi v^2 \exp\left(-\frac{m_{\mathrm{e}} v^2}{2k_{\mathrm{B}} T_{\mathrm{e}}}\right). \tag{2.128}$$

となることを導くことができる．

課題

エネルギーに対する分布関数

$$F_\epsilon(\epsilon) = \frac{4\sqrt{2}\pi}{m_{\mathrm{e}}^{3/2}} f(\epsilon)\sqrt{\epsilon} \tag{2.129}$$

を導出せよ．

略解

エネルギーと速さの関係 $\epsilon = (1/2) m_{\mathrm{e}} v^2$ を用いて $F(v)\,\mathrm{d}v$ を書き直すと，次式のようになる．

$$F(v)\, \mathrm{d}v = 4\pi v^2 f(v)\, \mathrm{d}v = \frac{4\sqrt{2}\pi}{m_{\mathrm{e}}^{3/2}} f(\epsilon)\sqrt{\epsilon}\, \mathrm{d}\epsilon \tag{2.130}$$

ここで，$\mathrm{d}\epsilon = m_{\mathrm{e}} v \mathrm{d}v$ なる関係があることを用いている．

従って，エネルギー ϵ に対する分布関数 $F_\epsilon(\epsilon)$ は，次式で与えられることになる．

$$F_\epsilon(\epsilon) = \frac{4\sqrt{2}\pi}{m_{\mathrm{e}}^{3/2}} f(\epsilon)\sqrt{\epsilon} \tag{2.131}$$

従って，エネルギー ϵ によって規程されたある物理量 $A(\epsilon)$ の平均値 $\langle A \rangle$ を求める場合には，$F_\epsilon(\epsilon)$ を用いて，次式のように計算することになる．

$$\langle A \rangle = \int_0^\infty A(\epsilon) F_\epsilon(\epsilon)\,\mathrm{d}\epsilon \tag{2.132}$$

豆知識

豆知識

電気化学とプラズマ

Debye 長は，もともとは，プラズマを対象として定義されたものではなく，電解質溶液中の正負イオンを扱う電気化学の分野において，Peter Debye と Erich Hükel によって導入されたパラメータである [5]．しかし，正負電荷の密度と輸送パラメータの値が大きく異なっている点を除くと，電解質もプラズマも，どちらも正負の電荷が多数混在し，全体としては中性となっている媒質であることから，両者の流体的性質を記述する方程式は全く同じになる．それ故に，電気化学と同じ概念がプラズマに導入されているのである．

豆知識

Langmuir によるシースの発見と命名

Mott-Smith と Irving Langmuir は，プラズマ中に金属電極 (プローブ) を挿入して電流電圧特性を計測する際に，プローブの周囲に鞘のような境界層が形成されることを見出し，それを**シース (sheath)** と名付けた [6]．その後，Tonks と Langmuir によってシース理論が提唱された [7]．Tonks と Langmuir による理論は，その時点では不十分なものであったが，その後，Bohm によって，ほぼその理論の骨格が確立された [3]．

豆知識

壁に衝突した荷電粒子の挙動

壁近傍の荷電粒子は，どちらも壁と接すると電荷を失い，荷電粒子としての性質を失う．電子の場合，壁が電気的に浮いている場合には，蓄積され，回路的に閉じた回路の一部になっている場合には，壁への電子の流束に相当する電子電流がその回路に流れることになる．どちらの場合も，電子は気相から消滅することになる．イオンの場合も，符号が異なる点を除くと，壁に対する電気的な効果は同じであるが，以下のように異なる点がある．正イオンが正電荷を壁に与えた後，イオンとしての粒子はその場所から消滅する．しかし，同時に，その粒子の中性のバージョンがその場に生成されることになるのである．

豆知識

シース端でボーム速度以上？それとも丁度ボーム速度？

Bohm 速度を表す式は，プラズマ中のイオン音波の伝播速度となっている．ボームの条件は，シースに流入するイオンは，イオン音波の速度以上で流入しなければならない，というものである．「以上」であるから，ボーム速度よりも大きければよいのであるが，それが無理であることを示す．ある粒子で構成されている媒質中でその粒子が速度を持ってある方向に輸送されている状態を考えよう．このとき，流体力学の教えるところによると，その媒質の中の粒子は，その媒質中を伝播する音波の伝播速度よりも速い速度で輸送されることはない，というものである．したがって，もともとのボーム条件は，イオンがシース端でボーム速度「以上」の速度を持つことを要請しているが，上記の流体力学的な条件を加味すると，イオンは，シース端において丁度ボーム速度に到達する，と解釈することになるのである．

参考文献

[1] E. Nasser, in "Gaseous Ionization and Plasma Electronics" (Wiley-Interscience, New York, NY, 1971) ch.14, pp. 426–442.

[2] W. Elenbaas, in "The High Pressure Mercury Vapour Discharge" (North Holland, Amsterdam, 1951) ch.1, pp. 1–10.

[3] D. Bohm, in "The Characteristics of Electrical Discharges in Magnetic Field", ed. by A. Guthrie and R. K. Wakerling (McGraw-Hill, New York, 1949) ch.3, pp. 77–86.

[4] M. Konuma, in "Film Deposition by Plasma Techniques" (Springer, Berlin, 1992) p. 48.

[5] P. Debye and E. Hückel, "Zur Theorie der Elektrolyte. I. Gefrierpunktserniedrigung und verwandte Erscheinungen", Phys. Z. **24**, 185–206 (1923).

[6] H. M. Mott-Smith and I. Langmuir, "The theory of collectors in gaseous discharges", Phys. Rev. **28**, 727–763 (1926).

[7] L. Tonks and I. Langmuir, "A general theory of the plasma of an arc", Phys. Rev. **34**, 876–922 (1929).