

## 第 1 章

# 荷電粒子の運動

プラズマの挙動に関する描像を頭の中に描くとき、ある時は荷電粒子を粒子として扱い、ある時は荷電粒子の集合を流体として扱う、ということをする。本章では、これらの代表的な例として、以下のような項目について述べる。

- 粒子的
  - サイクロトロン運動
  - $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  ドリフト
  - 移動度
- 流体的
  - 粒子連続の式
  - 運動量保存の式
  - 磁場中の輸送係数

### 1.1 荷電粒子の運動方程式

電磁場  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  の中で速度  $\mathbf{v}$  で運動する質量  $m$ , 電荷量  $q$  の荷電粒子に作用する力は

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (1.1)$$

で与えられ、Lorentz 力と呼ばれている。従って、その荷電粒子の運動を支配する運動方程式は、次式のようになる。

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (1.2)$$

### 1.2 一様電場中の荷電粒子の運動

荷電粒子に一様な電場  $\mathbf{E}$  だけが作用する場合、即ち、式(1.2)において  $\mathbf{B} = \mathbf{0}$  の場合、その荷電粒子の運動方程式は次式で与えられる。

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{E}. \quad (1.3)$$

### 1.3 一様磁場中の荷電粒子の運動

荷電粒子に一様な磁場  $\mathbf{B}$  だけが作用する場合、即ち、式(1.2)において  $\mathbf{E} = \mathbf{0}$  の場合、その荷電粒子の運動方程式は次式で与えられる。

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (1.4)$$

磁場  $\mathbf{B}$  が荷電粒子に及ぼす力は、常に  $\mathbf{v}$  の方向と垂直であるから、速度の大きさは変化せず、方向のみが変わる。速度  $\mathbf{v}$  の磁場に並行な成分を  $v_{\parallel}$  (スカラー) とし、磁場に垂直な平面への射影成分を  $\mathbf{v}_{\perp}$  (ベクトル) とすると、 $v_{\parallel}$  と  $|\mathbf{v}_{\perp}| = v_{\perp}$  は一定となる。従って、磁場に垂直な平面への射影点は、図 1.1 に示すように、その平面上を等速円運動する。その運動の角周波数  $\omega_C$  と半径  $r_C$  は次式で与えられる。

$$\omega_C = \frac{|q|B}{m}, \quad (1.5)$$

$$r_C = \frac{v_{\perp}}{\omega_C} = \frac{mv_{\perp}}{|q|B}. \quad (1.6)$$

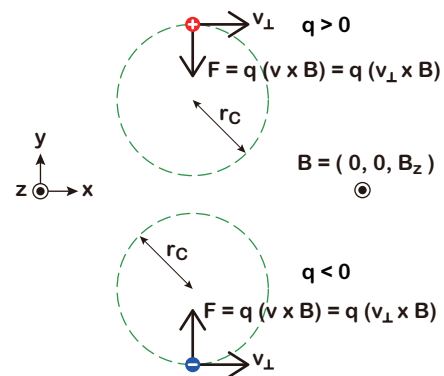


図 1.1 磁場に垂直な平面上に射影した荷電粒子のサイクロトロン運動。

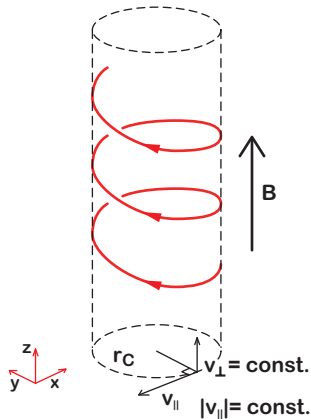


図 1.2 磁場と平行な速度成分と磁場と垂直な速度成分の両方を有する荷電粒子サイクロトロン運動.

この円運動をサイクロトロン (cyclotron) 運動といい、その半径を **Larmor 半径**、円運動の角周波数をサイクロトロン角周波数という。<sup>\*1</sup> 荷電粒子の電荷の符号が逆になると、図??に示すように、回転の方向が逆になる。荷電粒子の運動は、このサイクロトロン運動に加えて、磁場に並行な速度成分  $v_{\parallel}$  が加わるため、図??に示すように、磁場方向に一定のピッチで並進する螺旋運動となる。

### 課題

電荷量  $q$ 、速度  $\mathbf{v}$  の荷電粒子が、一様な磁場  $\mathbf{B}$  の作用を受けるとき、その荷電粒子の運動がどのようなかを示せ。

### 略解

荷電粒子が磁場から作用を受ける力は、 $q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$  であるが、この力は  $\mathbf{B}$  と並行な成分を持たず、 $\mathbf{B}$  に垂直な平面内の成分だけを持つ。磁場に平行な成分を  $\parallel$ 、垂直な成分を  $\perp$  で表すと、荷電粒子の運動方程式は、次式のようにになる。

$$m \frac{dv_{\parallel}}{dt} = 0, \quad (1.7)$$

$$m \frac{d\mathbf{v}_{\perp}}{dt} = q(\mathbf{v}_{\perp} \times \mathbf{B}). \quad (1.8)$$

磁場に平行な成分の方程式から、 $v_{\parallel}$  が一定値となることがわかる。従って、磁場  $\mathbf{B}$  に並行な運動は、等速運動となる。

磁場に垂直な成分の方程式は、 $\mathbf{B}$  に垂直な平面上の射影点の運動を支配する。この平面内で荷電粒子に作用する力は、 $q(\mathbf{v}_{\perp} \times \mathbf{B})$  であり、その方向は、常に  $\mathbf{v}_{\perp}$  と垂直な方向となる。従って、この力によって  $\mathbf{v}_{\perp}$  の大きさ  $v_{\perp} = |\mathbf{v}_{\perp}|$  が変わることはなく、方向のみが変わる。この力の大きさは、 $qv_{\perp}B$  で与えられるから、この力の大きさも一定となる。

大きさが一定の速度ベクトルを有する粒子に対して、常にその速度ベクトルと垂直な一定の力が働く運動は、等速回転運動である。従って、回転半径を  $r_C$  とし、接線方向と法線方向の運動方程式を書くと、次式のようになる。

$$m \frac{dv_{\perp}}{dt} = 0, \quad (1.9)$$

$$\frac{mv_{\perp}}{r_C} = |q|v_{\perp}B. \quad (1.10)$$

式(??)より、この等速回転運動の半径は次のようになる。

$$r_C = \frac{mv_{\perp}}{|q|B}. \quad (1.11)$$

また、この等速回転運動の角速度は、次式で与えられる。

$$\omega_C = \frac{v_{\perp}}{r_C} = \frac{|q|B}{m}. \quad (1.12)$$

回転の向きは、 $q(\mathbf{v}_{\perp} \times \mathbf{B})$  が円の中心を向くようになるから、 $\mathbf{B}$  を上向きにとり、荷電粒子を正イオンとすると、その粒子は、中心を右に見ながら進む向きに回り、電子の場合には、その逆に回る。従って、 $\mathbf{B}$  方向の等速並進運動と合わせると、粒子の運動は、等ピッチの螺旋運動となる。

## 1.4 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ドリフト

ここでは、電場  $\mathbf{E}$  と磁場  $\mathbf{B}$  の両方が荷電粒子に作用する場合を取り扱う。電場の方向と磁場の方向の関係が一般的な場合については、数値的な解析をすることになる。しかし、電場と磁場が直交する場合については、荷電粒子の運動を解析的に知ることができ、その運動は  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  ドリフトとして知られている。

$\mathbf{E}$  の  $\mathbf{B}$  と並行な成分を  $E_{\parallel}$  (スカラー) とし、 $\mathbf{B}$  に垂直な平面への射影を  $\mathbf{E}_{\perp}$  (ベクトル) とすると、その荷電粒子の運動方程式は、次式のようになる。

$$m \frac{dv_{\parallel}}{dt} = qE_{\parallel}, \quad (1.13)$$

$$m \frac{d\mathbf{v}_{\perp}}{dt} = q\mathbf{E}_{\perp} + q(\mathbf{v}_{\perp} \times \mathbf{B}). \quad (1.14)$$

<sup>\*1</sup> 角周波数であっても「角」を省略して言及される場合が多い。

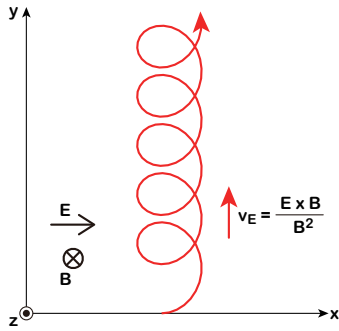


図 1.3  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  ドリフト運動. 磁束密度  $\mathbf{B}$  が  $z$  軸の紙面に突き刺さる方向に存在し, 電場が  $x$  軸の正の方向に存在する状態で, 正の荷電粒子が  $x$  の正方向に初期速度を持っていた場合の荷電粒子の軌道.

この場合の荷電粒子の運動は, サイクロトロン運動の中心が磁場の方向に一定加速度  $q\mathbf{E}_{\parallel}/m$  で運動し, 磁場に垂直な面内において, 次式で示される一定速度  $\mathbf{v}_E$  で並進する. その中心の周りにおいて, 式 (??), 式 (??) で表されるサイクロトロン運動をする. このときの速度  $\mathbf{v}_E$  での並進運動を  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  ドリフトという.

#### 課題

電荷量  $q$ , 速度  $\mathbf{v}$  の荷電粒子が, お互いに直交する電場  $\mathbf{E}$  と磁場  $\mathbf{B}$  の作用を受けるときの荷電粒子の運動がどのようなになるかを示せ.

#### 略解

$\mathbf{E}$  の  $\mathbf{B}$  と並行な成分を  $\mathbf{E}_{\parallel}$  (スカラー) とし,  $\mathbf{B}$  に垂直な平面への射影を  $\mathbf{E}_{\perp}$  (ベクトル) とすると, その荷電粒子の運動方程式は, 次式ようになる.

$$m \frac{dv_{\parallel}}{dt} = qE_{\parallel}, \quad (1.15)$$

$$m \frac{d\mathbf{v}_{\perp}}{dt} = q\mathbf{E}_{\perp} + q(\mathbf{v}_{\perp} \times \mathbf{B}). \quad (1.16)$$

ここで, かなり作為的ではあるが,  $\mathbf{v}_{\perp}$  を

$$\mathbf{E} + \mathbf{v}_E \times \mathbf{B} = \mathbf{0} \quad (1.17)$$

となるような  $\mathbf{v}_E$  とそれ以外の成分  $\mathbf{v}_B$  を用いて, 以下のように表しておくことにする.

$$\mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_E \quad (1.18)$$

この式 (??) で表される  $\mathbf{v}_{\perp}$  を式 (??) に代入すると,  $\mathbf{v}_B$

のみに関する以下の式が得られる.\*2

$$m \frac{d\mathbf{v}_B}{dt} = q(\mathbf{v}_B \times \mathbf{B}). \quad (1.19)$$

この式は, 速度  $\mathbf{v}_B$  なる速度を有する荷電粒子に磁場  $\mathbf{B}$  だけが作用したときの運動の方程式になっている. これは,  $\mathbf{v}_{\perp}$  の成分の内,  $\mathbf{B}$  のみが原因となって生じる回転運動に対応する速度成分だけを取りだしたものが,  $\mathbf{v}_B$  となっていることを意味する.

一方,  $\mathbf{v}_{\perp}$  を作為的に分けたときのもう一つの成分である  $\mathbf{v}_E$  については, 式 (??) で示される関係があると予め決めていた. 式 (??) の両辺の右側に  $\mathbf{B}$  を外積し, ベクトル公式を使うと,

$$\mathbf{v}_E = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} \quad (1.20)$$

が得られる. この速度成分  $\mathbf{v}_E$  は, 電場と磁場に直交する方向を持つ. また, 電場と磁場の大きさが一定であるから, この速度成分の大きさは一定値となる.

従って,  $\mathbf{v}_B$  と  $\mathbf{v}_E$  の合成ベクトルで表される合成速度ベクトル  $\mathbf{v}_{\perp}$  によって駆動される荷電粒子の軌道は,  $\mathbf{v}_B$  成分による回転運動をしながら, その回転中心が  $\mathbf{v}_E$  で並進する運動となる, ということがわかる.

ここで以下のベクトル公式を用いて式変形を行った.

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{C} \cdot \mathbf{A})\mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A})\mathbf{C} \quad (1.21)$$

式 (??) の右から  $\mathbf{B}$  を外積すると,

$$\mathbf{E} \times \mathbf{B} = -(\mathbf{v}_E \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \quad (1.22)$$

$$= \mathbf{B} \times (\mathbf{v}_E \times \mathbf{B}) \quad (1.23)$$

$$= (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B})\mathbf{v}_E - (\mathbf{v}_E \cdot \mathbf{B})\mathbf{B} \quad (1.24)$$

ここで,  $\mathbf{v}_E$  と  $\mathbf{B}$  は直交しているので,  $\mathbf{v}_E \cdot \mathbf{B} = 0$  である. また,  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{B} = B^2$  である. 従って, 次式が得られる.

$$\mathbf{v}_E = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} \quad (1.25)$$

## 1.5 衝突を伴う荷電粒子の運動

前節では, 電磁場の作用を受ける荷電粒子は, 衝突を伴わない粒子であった. プラズマ中の荷電粒子は, 電磁場の作用を受けるとともに, その荷電粒子以外の粒子との衝突を伴う. ここでは, 衝突を考慮した場合の荷電粒子の運動について述べる.

\*2 作為的な分解をしたのは, このようにするため.

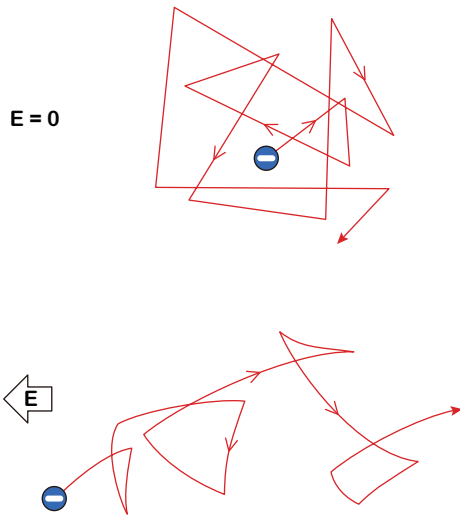


図 1.4 電場  $\mathbf{E}$  が印加されている空間中の荷電粒子の運動の想像図.

### 1.5.1 移動度

荷電粒子に電界が作用すると、荷電粒子には式 (??) で示される力が働く。即ち、荷電粒子はその力によって加速される。もしも衝突が無ければ、この力によって無限大の速度まで加速されることになる。一方、図??に示すように衝突過程が伴う場合には、衝突のたびに減速されることになるため、平均的には加速と減速が釣り合ったある一定の速度で並進運動しているように見えることになるであろう。

ここでは、図??に示すように、加速と衝突を繰り返す荷電粒子について、その速度と電場との関係について考える。このとき、以下の仮定のもとに考える。この仮定が妥当であるかどうかは、実験との比較によって検討されるべきものである。

- 衝突によって速度は一旦ゼロになる
- 衝突の時間間隔は本来はランダムであるが、平均値で表してもよい

電荷量  $q$ 、質量  $m$  の荷電粒子が電場  $\mathbf{E}$  の作用を受けるときの力は、 $q\mathbf{E}$  である。従って、衝突が無ければ、この荷電粒子の運動方程式は、次式ようになる。

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{E}. \quad (1.26)$$

衝突と衝突の間の時間間隔はランダムであると考えられるが、ここでは簡単化のために平均的に  $\tau$  であるとする

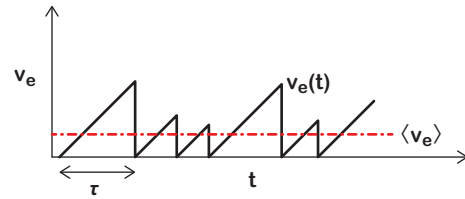


図 1.5 電場  $\mathbf{E}$  が印加されている空間中の荷電粒子の運動の想像図.

と、 $\tau$  秒毎にそれまでに得た運動量  $m\mathbf{v}$  がゼロになることになる。従って、平均的には、単位時間当たり  $m\mathbf{v}/\tau$  の運動量が失われていると見ることができる。従って、衝突のある場合の運動方程式は、次式のようになる。

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{E} - \frac{m\mathbf{v}}{\tau}. \quad (1.27)$$

定常状態では  $\mathbf{v}$  の時間変化は無いので、式 (??) において  $\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{0}$  である。これより、衝突を伴う電場中の荷電粒子の平均的な速度  $\mathbf{v}$  は、次式のように電場に比例するということが導き出され、実験的にも確認されている。

$$\mathbf{v} = \frac{q\tau}{m} \mathbf{E} = \mu \mathbf{E}. \quad (1.28)$$

この関係式における比例係数  $\mu$  を移動度という。

$$\mu = \frac{q\tau}{m} \quad (1.29)$$

この式から、移動度は、荷電粒子の質量に反比例し、衝突時間間隔に比例する、ということが読み取れる。これは、重たい粒子ほど動きが鈍く、衝突頻度が高いほど高速になることが妨げられる、という直感的描像と一致しているのだから、わかりやすいのではないだろうか。なお、移動度の単位は、MKS 系では  $\text{m}^2/(\text{V}\cdot\text{s})$ 、CGS 系では  $\text{cm}^2/(\text{V}\cdot\text{s})$  となる。

## 1.6 プラズマの流体方程式

ここではプラズマを流体力学的に扱う場合の方程式を示す。電子やイオンを粒子として扱い、その粒子の運動方程式などを扱うのではなく、集合体としての平均量を方程式化する。プラズマ中の荷電粒子の密度は、 $10^9\text{--}10^{13} \text{ cm}^{-3}$  程度であり、一般的に流体として扱われている大気圧のガス ( $10^{19} \text{ cm}^{-3}$ ) や液体 ( $10^{22} \text{ cm}^{-3}$ ) と比較すると粒子の数密度は希薄であるが、上記の程度の荷電粒子の密度があれば、十分に流体力学的に扱うことができることがわかっている。

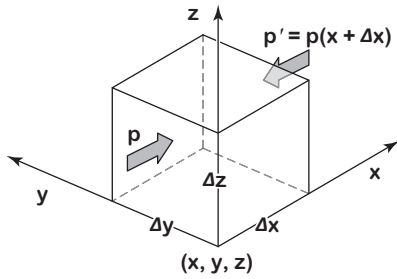


図 1.6 気体がある微小体積に及ぼす圧力の概念図.

1.6.1 連続の式

連続の式とは、ある閉領域の粒子を考えたときに、その閉領域内での粒子の生成や消滅がなければ、その閉領域の中の粒子の数密度の単位時間当たりの増減は、その閉領域に単位時間当たりに流れ込む、或いは、単位時間当たりにそこから流れ出す粒子の個数に等しいという考えを式にしたものであり、次式で与えられる。

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{\Gamma} \tag{1.30}$$

ここで、 $n$  は粒子の数密度、 $\mathbf{u}$  は粒子の速度である。

閉領域内での粒子の生成や消滅がある場合には、その単位時間当たりの生成率と消滅率をそれぞれ  $G$ 、 $L$  とすれば、連続の式は以下のように表されることになる。

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{\Gamma} + G - L \tag{1.31}$$

1.6.2 運動量保存の式

運動量保存の式は、別名 **Eular** の式と呼ばれており、流体の動きを表す基本方程式である。基本的な考え方は、ある領域に存在するある粒子（の集合）の運動量の単位時間当たりの増減量は、以下の 3 つの要因で増減する、という考え方を式にしたものである。

- 圧 力 隣の領域からの圧力
- 電磁場 その場所の電磁場が及ぼす電磁力
- 衝 突 その領域内での衝突

圧力

図??に示すような微小体積の領域を考え、この微小領域に圧力によって加わる単位体積当たりの力を  $\mathbf{F}_P$  とする。この  $\mathbf{F}_P$  の  $x$ 、 $y$ 、 $z$  成分を圧力  $p$  によってどのように表されることになるかを示す。  $x$  方向の正味の圧力に

ついては、 $x = x$  における端面からの圧力  $p(x)$  と、もう片方の端面である  $x = x + \Delta x$  からの圧力  $p(x + \Delta x)$  の差となる。従って、次式で与えられることになる。

$$p(x) - p(x + \Delta x) = -\frac{\partial p}{\partial x} \Delta x \tag{1.32}$$

ここで、 $x = x$  から  $x = x + \Delta x$  の間の  $p(x)$  の変化は、 $\Delta x$  が十分に小さいので直線で近似できる、即ちテーラー展開の第 1 項で近似できるとしている\*3。圧力は単位面積当たりの力であるから、圧力がかかる面積  $\Delta y \Delta z$  をかけ算すれば力となる。即ち、 $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$  の体積を有するこの領域に圧力によって及ぼされる  $x$  方向の力は、

$$-\frac{\partial p}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z = -\frac{\partial p}{\partial x} \Delta V \tag{1.33}$$

となる。  $y$  方向と  $z$  方向についても同様に計算すれば、この力のベクトルは、

$$-\nabla p \Delta V \tag{1.34}$$

となる。この力を  $\Delta V$  で割り算すれば、単位体積当たりの力  $\mathbf{F}_P$  となる。即ち、

$$\mathbf{F}_P = -\nabla p \tag{1.35}$$

電磁力

電場と磁場による力を  $\mathbf{F}_{EM}$  とすると、 $\mathbf{F}_{EM}$  は、Lorentz の法則に従って、次式で与えられる。

$$\mathbf{F}_{EM} = nq(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \tag{1.36}$$

ここで、 $n$  はその領域内の粒子の数密度、 $q$  はその粒子が持つ電荷量、 $\mathbf{u}$  はその粒子の速度である。

衝突

衝突による力、即ち運動量の変化率を  $\mathbf{F}_C$  とすると、それを表す式は、衝突過程によって様々となる。簡単な例として、想定している粒子が 1 回の衝突で全ての運動量を失うとし、その衝突頻度（衝突周波数）が  $\nu$  であるとする\*4、 $\mathbf{F}_C$  は次式で与えられる。

$$\mathbf{F}_C = -mn\nu\mathbf{u} \tag{1.37}$$

\*3  $p(x + \Delta x) = p(x) + \frac{\partial p}{\partial x} \Delta x$  とできるということ。

\*4 移動度の概念を出したときと同じ考え方

## 運動量保存の式 (全微分型)

以上のような運動量の増減の要因によって、想定している領域内の粒子の集合が持つ運動量の単位時間当たりの増加率が表される、とすると、次式が得られる。

$$nm \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla p + nq(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) - mn\nu\mathbf{u} \quad (1.38)$$

## 運動量保存の式 (偏微分型)

上記の全微分型の場合の  $\frac{d\mathbf{u}}{dt}$  は、粒子とともに動く座標系における加速度を表している。即ち、想定している領域が粒子とともに動くような座標系である。従って、その動く座標系でみる限り、その領域への粒子の流入や流出は無い。固定された座標系で想定した領域内の加速度は、偏微分の  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$  で表されることになる。この場合には、ある領域の端面における粒子の流入と流出が起こり得るため、その粒子が持つ運動量についても流入と流出が起こる。流入分と流出分に差分があれば、その領域内の運動量に増減が生じることになる。ここでは、それを考慮した方程式を導く。

$x$  方向について、単位面積当たり、単位時間当たりの粒子の正味の流入数を考えると、次式で与えられる\*5。

$$nu_x(x) - nu_x(x + \Delta x) = -n \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad (1.39)$$

この流入数に粒子が持つ運動量  $mu_x$  をかければ、運動量の流入量となる。即ち、

$$-n \frac{\partial u_x}{\partial x} mu_x \quad (1.40)$$

$y$  方向と  $z$  方向についても同様に考えれば、

$$-nm(\nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} = -nm\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \quad (1.41)$$

従って、運動量保存の式は、次式のようになる。

$$mn \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla p + nq(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) - mn\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - mn\nu\mathbf{u} \quad (1.42)$$

なお、上記では、全微分と偏微分の意味合いを理解するために、原理に戻って導出したが、全微分と偏微分の意味を理解しており、その間に成り立つ数学公式を知っ

ていれば、以下のようにすればよい。

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} \quad (1.43)$$

$$= \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} u_x + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} u_y + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} u_z \quad (1.44)$$

$$= \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} \quad (1.45)$$

なお、ここで、

$$\mathbf{u} = \left( \frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial t} \right) \quad (1.46)$$

であるから、 $\mathbf{u}$  の  $x, y, z$  成分は、それぞれ、 $x$  のみ、 $y$  のみ、 $z$  のみに依存する成分であり、

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \left( \frac{\partial u_x}{\partial x}, 0, 0 \right), \quad (1.47)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} = \left( 0, \frac{\partial u_y}{\partial y}, 0 \right), \quad (1.48)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} = \left( 0, 0, \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \quad (1.49)$$

となることを使っている。

## 1.7 磁場中の輸送係数

プラズマに磁場  $\mathbf{B}$  が印加されている場合、磁場の効果によって電子の輸送係数(移動度や拡散係数)が変化する。

$D_{\parallel}$ ,  $\mu_{\parallel}$  を磁場  $\mathbf{B}$  に並行な成分とし、 $D_{\perp}$ ,  $\mu_{\perp}$  を磁場  $\mathbf{B}$  に垂直な成分として、どのように変化するのかを示そう。結論から先に示すと、以下ようになる。

磁場に平行な成分については、磁場の無いときと同じであり、次式で与えられる。

$$D_{\parallel} = \frac{k_B T_e}{m_e \nu_e}, \quad (1.50)$$

$$\mu_{\parallel} = \frac{q_0}{m_e \nu_e}. \quad (1.51)$$

一方、磁場に垂直な成分については、以下のようになる。

$$D_{\perp} = \frac{D_{\parallel}}{1 + (\omega_c / \nu_e)^2}, \quad (1.52)$$

$$\mu_{\perp} = \frac{\mu_{\parallel}}{1 + (\omega_c / \nu_e)^2}. \quad (1.53)$$

ここで、 $\omega_c$  は、サイクロトロン周波数である。

## 課題

磁場中が印加されたプラズマ中の電子の輸送係数を表す式を導出せよ。

\*5  $p$  の場合と同様に、テーラー展開の一次の項だけを使って式変形している。なお、これが正なら、 $\Delta x$  だけ先のところから出る量が少ないということなので、流入となる。

## 略解

輸送係数，即ち，移動度と拡散係数は，運動量保存則の式における電場の項の係数，及び，濃度勾配の項の係数として求められるものである．従って，運動量保存則をまず書き下す．印加されている磁場  $\mathbf{B}$  の向きは  $z$  方向とし， $\mathbf{B} = |\mathbf{B}|$  とする．

$$m_e n_e \left[ \frac{\partial \mathbf{v}_e}{\partial t} + (\mathbf{v}_e \cdot \nabla) \mathbf{v}_e \right] = -\nabla p_e + n_e q_0 (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \mathbf{F}_c \quad (1.54)$$

ここで，定常状態を考え左辺第一項をゼロとし， $\mathbf{u}$  は十分小さいとして左辺第二項もゼロとする．運動量保存の式は，次式のようになる．

$$-\nabla p_e + n_e q_0 (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \mathbf{F}_c = 0 \quad (1.55)$$

ここで，衝突周波数を  $\nu_c$  とすると，

$$\mathbf{F}_c = -m_e n_e \nu_c \mathbf{v}_e \quad (1.56)$$

であるから，運動量保存の式は以下のようになる．

$$-\nabla p_e + n_e q_0 (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) - m_e n_e \nu_c \mathbf{v}_e = 0 \quad (1.57)$$

また，電子の圧力については，濃度勾配によって表現される．即ち，

$$p_e = \frac{1}{3} n_e m_e \langle v_e^2 \rangle \quad (1.58)$$

$$\frac{1}{2} m_e \langle v_e^2 \rangle = \frac{3}{2} k_B T_e \quad (1.59)$$

より，

$$p_e = n_e k_B T_e \quad (1.60)$$

従って，運動量保存則を電子の密度  $n_e$  と速度  $\mathbf{v}_e$  のみによって表すと，次式のようになる．

$$-k_B T_e \nabla n_e + n_e q_0 (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) - m_e n_e \nu_c \mathbf{v}_e = 0 \quad (1.61)$$

上式において，磁場に並行な成分だけを抽出すると， $\mathbf{v}_e \times \mathbf{B}$  の磁場に並行な成分がゼロになることから，次式のようになる．

$$-k_B T_e \nabla_{\parallel} n_e + n_e q_0 \mathbf{E}_{\parallel} - m_e n_e \nu_c \mathbf{v}_{e\parallel} = 0 \quad (1.62)$$

この式を  $\mathbf{v}_{e\parallel} =$  の形に変形すると，次式を得る．

$$\mathbf{v}_{e\parallel} = \left( \frac{q_0}{m_e \nu_c} \right) \mathbf{E}_{\parallel} - \left( \frac{k_B T_e}{m_e \nu_c} \right) \frac{\nabla n_e}{n_e} \quad (1.63)$$

電場と濃度勾配の項の係数がそれぞれ移動度と拡散係数であるので，磁場と並行な成分の移動度と拡散係数は，次式のようになる．

$$\mu_{e\parallel} = \frac{|q_0|}{m_e \nu_c} \quad (1.64)$$

$$D_{e\parallel} = \frac{k_B T_e}{m_e \nu_c} \quad (1.65)$$

即ち，磁場に並行な成分については，磁場の無いときと同じであることがわかる．

次に，磁場に垂直な成分についてみてみよう．垂直な成分の式は次式のようになる．

$$-k_B T_e \nabla n_e + n_e q_0 (\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{v}_{e\perp} \times \mathbf{B}_{\perp}) - m_e n_e \nu_c \mathbf{v}_{e\perp} = 0 \quad (1.66)$$

これを  $v_{ex}$ ,  $v_{ey}$  の成分で書き下すと，次式のようになる．

$$v_{ex} = \pm \mu_{e\parallel} E_x - \frac{D_{e\parallel}}{n_e} \frac{\partial n_e}{\partial x} + \frac{\omega_c}{\nu_c} v_{ey}, \quad (1.67)$$

$$v_{ey} = \pm \mu_{e\parallel} E_y - \frac{D_{e\parallel}}{n_e} \frac{\partial n_e}{\partial y} + \frac{\omega_c}{\nu_c} v_{ex} \quad (1.68)$$

これを， $v_{ex} =$  と  $v_{ey} =$  の式にまとめると，次式のようになる．

$$v_{ex} \left( 1 + \frac{\omega_c^2}{\nu_c^2} \right) = \pm \mu_{e\parallel} E_x - \frac{D_{e\parallel}}{n_e} \frac{\partial n_e}{\partial x} + \frac{\omega_c^2}{\nu_c^2} \frac{E_y}{B} \mp \frac{\omega_c^2}{\nu_c^2} \frac{k_B T_e}{q_0 B} \frac{1}{n_e} \frac{\partial n_e}{\partial y}, \quad (1.69)$$

$$v_{ey} \left( 1 + \frac{\omega_c^2}{\nu_c^2} \right) = \pm \mu_{e\parallel} E_y - \frac{D_{e\parallel}}{n_e} \frac{\partial n_e}{\partial y} - \frac{\omega_c^2}{\nu_c^2} \frac{E_x}{B} \pm \frac{\omega_c^2}{\nu_c^2} \frac{k_B T_e}{q_0 B} \frac{1}{n_e} \frac{\partial n_e}{\partial x} \quad (1.70)$$

上式の右辺の第三項は， $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  ドリフトの成分である．第四項は反磁性ドリフトの成分となっている．これらについては，本書の範囲外となるとの説明は割愛させて頂く．ここで，重要なのは，第一項（電場の項）と第二項（濃度勾配の項）における係数である．それらを見てみると，次式のようになっている．

$$v_{ex} = \pm \mu_{e\perp} E_x - \frac{D_{e\perp}}{n_e} \frac{\partial n_e}{\partial x} + \dots, \quad (1.71)$$

$$v_{ey} = \pm \mu_{e\perp} E_y - \frac{D_{e\perp}}{n_e} \frac{\partial n_e}{\partial y} - \dots \quad (1.72)$$

ここで，

$$\mu_{e\perp} = \frac{\mu_{e\parallel}}{1 + (\omega_c^2/\nu_c^2)}, \quad D_{e\perp} = \frac{D_{e\parallel}}{1 + (\omega_c^2/\nu_c^2)}. \quad (1.73)$$

であり、これらが磁場と垂直方向の輸送係数（移動度と拡散係数）となる。

以下では、上式で表される磁場が印加されたときの磁場と垂直な方向の輸送係数を表す式の意味するところを考察してみよう。磁場と平行な成分と異なる点は、分母に含まれるサイクロトロン周波数  $\omega_c$  と衝突周波数  $\nu_c$  である。これらは、次式で与えられる。

$$\omega_c = \frac{|q_0 B|}{m_e}, \quad (1.74)$$

$$\nu_c = n_e \sigma_c v_e = n_e \sigma \sqrt{\frac{2k_B T_e}{m_e}} \quad (1.75)$$

即ち、

$\omega_c$  :  $B$  に依存する

$\nu_c$  :  $n_e$  と  $T_e$  に依存する

従って、電子密度  $n_e$ 、電子温度  $T_e$  に対する磁場  $B$  の大きさが十分に大きいか、大きくないか、によって、磁場が輸送係数に実効的な効果を及ぼすかどうかが決まる。磁場が十分小さく、 $\omega_c/\nu_c \ll 1$  の場合には、輸送係数の磁場と垂直な成分は、磁場がない時、即ち磁場と平行な成分と同じである、と見なしてよいということになる。

では、磁場が無視出来なくなるぐらいの磁場の大きさとは具体的にどれくらいなのであろうか？電子とイオンについて、その影響を具体的に調べてみよう。もしも、 $\sigma$  と  $k_B T_e$  が同じであれば、電子の  $\omega_c/\nu_c$  は、イオンのそれよりも  $\sqrt{M_i/m_e}$  だけ大きい値となる。また、電子の Larmor 半径は、イオンのそれよりも  $\sqrt{M_i/m_e}$  だけ小さい値となる。例えば、アルゴン原子の場合、271 倍となる。従って、100 ~ 1000 G の磁場が印加されると、電子の輸送係数は磁場の影響を大きく受ける、という事になる。一方、イオンに関しては、ほとんど磁場の影響を受けないことになる。

次に、磁場の影響を大きく受けている場合、即ち、 $\omega_c/\nu_c \gg 1$  の場合について考えて見よう。この場合、分母の  $1+$  は無視できるので、磁場に垂直な方向の輸送係数は次式のように近似されることになる。

$$\mu_{e\perp} = \mu_{e\parallel} \left( \frac{\nu_c}{\omega_c} \right)^2, \quad D_{e\perp} = D_{e\parallel} \left( \frac{\nu_c}{\omega_c} \right)^2 \quad (1.76)$$

一方、磁場に平行な方向の輸送係数は次式のように表されていた。

$$\mu_{e\parallel} = \frac{q_0}{m_e \nu_c}, \quad D_{e\parallel} = \frac{k_B T_e}{m_e \nu_c} \quad (1.77)$$

従って、磁場に垂直な成分は、以下のように書き直される。

$$\mu_{e\perp} = \frac{q_0}{m_e \omega_c^2} \nu_c, \quad D_{e\perp} = \frac{k_B T_e}{m_e \omega_c^2} \nu_c \quad (1.78)$$

これらより、サイクロトロン周波数が衝突頻度よりも十分大きくなるぐらいの磁場が印加された場合、即ち、 $\omega_c/\nu_c \gg 1$  の場合には、

- 磁場に平行な方向の輸送係数は、衝突頻度に反比例して小さくなる
- 磁場に垂直な方向の輸送係数は、衝突頻度に比例して大きくなる

ということがわかるのである。