

電磁気演習 1999

1999年12月17日

Contents

1	ベクトル解析	9
1.1	スカラーとベクトル	9
1.2	直角座標 (Cartesian 座標)	9
1.3	ベクトルの基本演算	10
1.4	スカラー積	11
1.5	ベクトル積	12
1.6	円柱座標と球座標	13
1.6.1	円柱座標	13
1.6.2	球座標	14
2	ベクトルの微積分	17
2.1	微分	17
2.2	線積分	17
2.3	面積分	19
2.4	体積分	20
2.5	面積要素	21
2.6	体積要素	21
3	ベクトル場の微分演算子	23
3.1	勾配	23
3.1.1	grad	23
3.1.2	スカラーポテンシャル	23
3.2	発散	24
3.2.1	div	24
3.2.2	Gauss の定理	24
3.3	回転 (rotation)	24
3.3.1	rot	24
3.3.2	Stokes の定理	25

3.4	ラプラシアン	25
3.5	ベクトル演算子の性質	25
3.5.1	grad	25
3.5.2	div	26
3.5.3	rot	26
3.5.4	ベクトル演算子の公式	26
4	電場と静電ポテンシャル	27
4.1	クーロンの法則	27
4.2	電場	28
4.3	Gauss の法則 (積分形)	28
4.4	Gauss の法則 (微分形)	29
4.5	静電ポテンシャル	29
4.5.1	電場と静電ポテンシャルの関係	29
4.5.2	静電ポテンシャルの性質	29
4.6	基本電荷分布形状による電場と静電ポテンシャル	30
5	静電場 (その 2)	33
5.1	Poisson の方程式	33
5.2	電気双極子	33
5.3	コンデンサ	34
5.3.1	静電容量	34
5.3.2	静電エネルギー	34
5.4	静電場のエネルギー	35
6	静磁場	37
6.1	Coulomb の法則	37
6.1.1	磁石	37
6.1.2	電流の磁気作用	37
6.1.3	磁場	37
6.2	Gauss の法則	38
6.3	Ampere の法則	38
6.4	ベクトルポテンシャル	38
6.4.1	電場のスカラーポテンシャル	38
6.4.2	磁場のベクトルポテンシャル	39
6.5	Biot-Savart の法則	39

7	静磁場 (その 2)	41
7.1	Poisson の方程式	41
7.1.1	電場に関する Poisson の方程式	41
7.1.2	磁場に関する Poisson の方程式	41
7.1.3	電場の Poisson の方程式の解	42
7.1.4	磁場の Poisson の方程式の解	42
7.2	$\Delta A = -\mu_0 i$ の導出	43
8	真空以外の空間の電磁場	45
8.1	誘電体中の静電場	45
8.1.1	電場 E と電束密度 D	45
8.1.2	境界条件	45
8.2	磁性体中の静磁場	46
8.2.1	磁場 H と磁束密度 B	46
8.2.2	境界条件	46
9	電磁力	49
9.1	アンペールの力	49
9.2	ローレンツの力	50
9.2.1	磁場による力の導出	50
9.3	磁荷	50
9.3.1	磁荷	50
9.3.2	磁荷の Coulomb の法則	51
9.3.3	磁場 H	51
9.3.4	磁荷の作る磁場と磁位	51
9.3.5	磁気双極子	52
9.3.6	アンペールの等価磁石の法則	52
9.3.7	円電流と磁気双極子の比較	53
10	時間的に変動する場	55
10.1	静電場の基本法則	55
10.2	$\text{rot } H = i$ の一般化	55
10.2.1	なぜ $\partial D / \partial t$ が必要か	56
10.3	$\text{rot } E = 0$ の一般化	57
10.3.1	なぜ $\partial B / \partial t$ が必要か	57
10.4	運動する導線について	58
10.5	交流理論	59

11	電磁気学の基本法則	61
11.1	Maxwell の方程式	61
11.2	エネルギー保存則	61
11.2.1	導出	62
11.3	電磁ポテンシャル	63
11.3.1	$-\partial A/\partial t$ 追加の理由	64
11.3.2	動電磁場の Poisson の方程式導出	65
A	補足	67
A.1	微分	67
A.1.1	微分係数	67
A.1.2	微分の性質	68
A.1.3	微分の応用	69
A.1.4	偏微分	70
A.2	積分	70
A.2.1	不定積分	70
A.2.2	積分性質	71
A.2.3	変数変換による積分	71
A.2.4	定積分 (一重積分)	71
A.2.5	重積分	72
A.2.6	累次積分	72
A.2.7	変数分離形	73
A.3	勾配に関する補足	73
A.4	発散に関する補足	74
A.4.1	発散演算子の導出	74
A.4.2	ガウスの発散定理の説明	75
A.4.3	Stokes の定理の説明	76
A.5	立体角	77
A.5.1	二次元の角度 (弧度)	77
A.5.2	三次元の角度 (立体角)	77
A.5.3	微分立体角 $d\Omega$ と面積要素 dS の関係	78
A.6	ガウスの法則の証明	78
A.6.1	電束 (または電気力線) と電束密度について	79
A.6.2	電束密度と電場の関係 ($\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$)	80
A.7	誘電体中の静電場の境界条件	81
A.7.1	法線方向	81
A.7.2	接線方向	82
A.8	磁性体中の静磁場の境界条件	82

A.8.1 法線方向	82
A.8.2 接線方向	83
A.8.3 境界面に電流密度がある時	84
A.9 異なる座標系の微分演算子の表式	85
A.10 演習問題 1 (ベクトル解析 1)	87
A.11 演習問題 2 (ベクトルの微積分)	88
A.12 演習問題 3 (ベクトル演算子)	90
A.13 演習問題 4 (静電場と静電ポテンシャル)	92
A.14 演習問題 5 (コンデンサと静電場エネルギー)	94
A.15 演習問題 6 (静磁場)	96
A.16 演習問題 7 (静磁場その 2)	99
A.17 演習問題 8 (真空以外の空間の電磁場)	100
A.18 演習問題 9 (電磁力)	102
A.19 演習問題 10 (時間的に変動する場)	105
A.20 演習問題 7 (静磁場その 2)	107

Chapter 1

ベクトル解析

1.1 スカラーとベクトル

スカラー量とスカラー場 大きさと符号のみをもつ量（質量，時間，長さなど）をスカラー量といい，空間の各点でスカラー関数 $\phi(r)$ が定義されている領域をスカラー場という．

ベクトル量とベクトル場 大きさと向きを有する量（力，速度，電場，磁場など）をベクトル量といい，空間の各点でベクトル関数 $A(x, y, z)$ が定義されている領域をベクトル場という．

1.2 直角座標 (Cartesian 座標)

基本ベクトル x 軸， y 軸， z 軸の正の方向に向かう単位ベクトル（大きさが 1 のベクトル）．

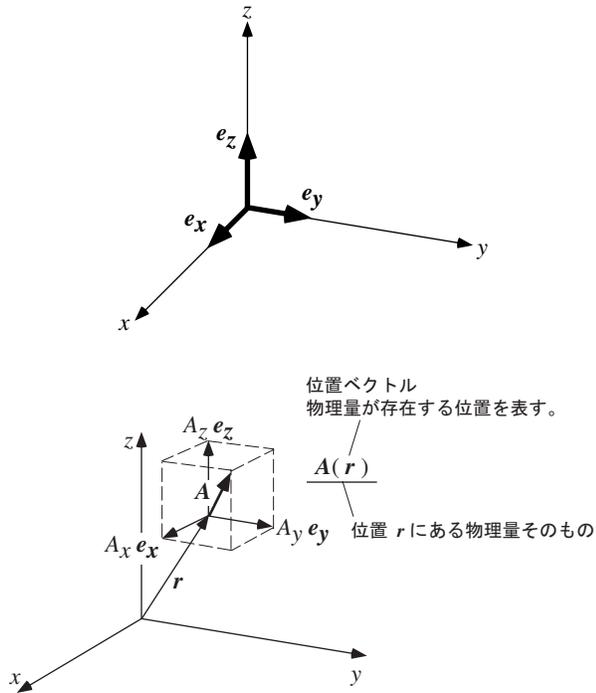
$$e_x, e_y, e_z$$

ベクトル量の表示形式

- $A = (A_x, A_y, A_z)$
- $A = A_x e_x + A_y e_y + A_z e_z$

演算と成分の関係

$$\text{絶対値 } A = |A| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2},$$



加減算 $A \pm B = (A_x \pm B_x)e_x + (A_y \pm B_y)e_y + (A_z \pm B_z)e_z,$

定数倍 $aA = aA_x e_x + aA_y e_y + aA_z e_z$

1.3 ベクトルの基本演算

ベクトルの加減算に関する法則 .

交換 $A \pm B = B \pm A$

結合 $A \pm (B \pm C) = (A \pm B) \pm C$

スカラー倍に関する法則

交換 $\alpha(\beta A) = \beta(\alpha A) = (\alpha\beta)A$

分配 $(\alpha \pm \beta)A = \alpha A \pm \beta A$

分配 $\alpha(A \pm B) = \alpha A \pm \alpha B$

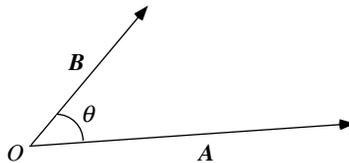
1.4 スカラー積

定義：

二つのベクトル A と B が角 θ で交わる時、演算；

$$A \cdot B = |A||B| \cos \theta$$

を A と B の内積またはスカラー積という。



性質：

- $A \cdot B = B \cdot A$
- $A \cdot A = |A|^2$
- $A \cdot B = 0 \Leftrightarrow A \perp B$
- $\cos \theta = \frac{A \cdot B}{|A||B|}$
- $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$
- $(aA) \cdot B = a(A \cdot B) = A \cdot (aB)$

基本ベクトルの内積：

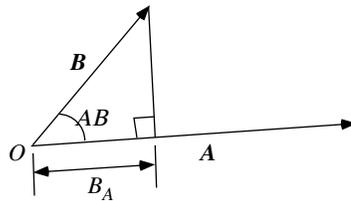
- $e_x \cdot e_x = e_y \cdot e_y = e_z \cdot e_z = 1$
- $e_x \cdot e_y = e_y \cdot e_z = e_z \cdot e_x = 0$

計算式：

$$A \cdot B = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

射影：

$$\begin{aligned}
 B_A &= \text{Proj. } B \text{ on } A \\
 &= |B| \cos(\angle AB) \\
 &= |B| \frac{A \cdot B}{|A||B|} \\
 &= \frac{A \cdot B}{|A|} \\
 &= e_A \cdot B
 \end{aligned}$$



1.5 ベクトル積

定義：

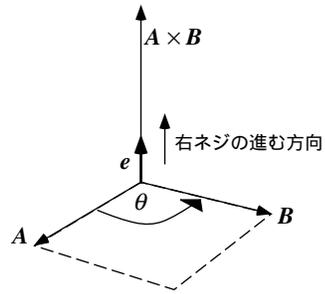
二つのベクトル A と B の交わる角を θ とする．その交点を中心に A から B の向きの回転を考えたとき，右ネジの進む向きを持つ単位ベクトルを e とする．このとき，演算；

$$A \times B = (|A||B| \sin \theta) e$$

を A と B の外積又はベクトル積という． A と B の作る平行四辺形の面積は $S = |A||B| \sin \theta = |A \times B|$ となる．

外積の性質：

- $A \times B = -B \times A$
- $A \times A = 0$
- $A \times B = 0 \leftrightarrow A \parallel B$



- $(A + B) \times C = A \times C + A \times C$
- $(aA) \times B = a(A \times B) = A \times (aB)$

基本ベクトルの外積の性質：

- $e_x \times e_x = e_y \times e_y = e_z \times e_z = \mathbf{0}$
- $e_x \times e_y = e_z, e_y \times e_z = e_x, e_z \times e_x = e_y$

計算式：

$$\begin{aligned} A \times B &= (A_y B_z - A_z B_y) e_x + (A_z B_x - A_x B_z) e_y + (A_x B_y - A_y B_x) e_z \\ &= \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \end{aligned}$$

1.6 円柱座標と球座標

1.6.1 円柱座標

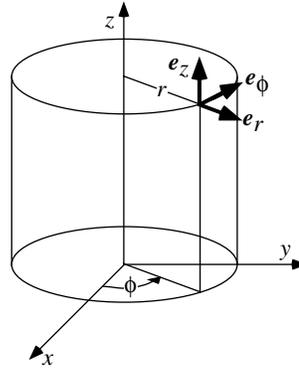
図のように (r, ϕ, z) を成分とする座標系．軸対称の現象を記述するとき便利．ここで $r \geq 0, 0 \leq \phi \leq 2\pi$ である．

単位ベクトル

$$e_r$$

$$e_\phi$$

$$e_z$$



Cartesian 座標との関係

$$x = r \cos \phi$$

$$y = r \sin \phi$$

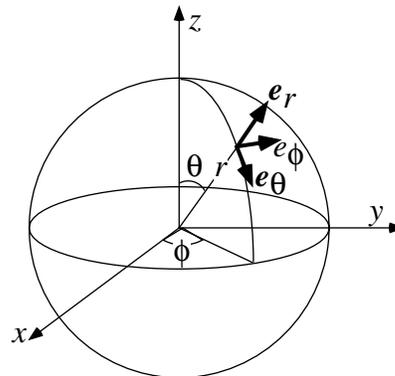
$$z = z$$

位置ベクトル

$$\mathbf{p} = r\mathbf{e}_r + z\mathbf{e}_z$$

1.6.2 球座標

図のように (r, θ, ϕ) を成分とする座標系．点対称の現象を記述するとき便利．ここで， $r \geq 0$ ， $0 \leq \phi \leq 2\pi$ ， $0 \leq \theta \leq \pi$ である．



単位ベクトル

e_r e_θ e_ϕ

Cartesian 座標との関係

$$x = r \sin \theta \cos \phi$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi$$

$$z = r \cos \theta$$

位置ベクトル

$$\mathbf{p} = r \mathbf{e}_r$$

Chapter 2

ベクトルの微積分

2.1 微分

ベクトル関数の微分係数 (導関数):

$$\frac{d}{dt}\mathbf{A}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{A}(t + \Delta t) - \mathbf{A}(t)}{\Delta t}$$

性質:

成分 $\frac{d}{dt}\mathbf{A}(t) = \frac{d}{dt}A_x(t)\mathbf{e}_x + \frac{d}{dt}A_y(t)\mathbf{e}_y + \frac{d}{dt}A_z(t)\mathbf{e}_z$

和差 $\frac{d}{dt}\{\mathbf{A}(t) \pm \mathbf{B}(t)\} = \frac{d}{dt}\mathbf{A}(t) \pm \frac{d}{dt}\mathbf{B}(t)$

スカラー倍 $\frac{d}{dt}\{c(t)\mathbf{A}(t)\} = \frac{d}{dt}c(t)\mathbf{A}(t) + c(t)\frac{d}{dt}\mathbf{A}(t)$

スカラー積 $\frac{d}{dt}\{\mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{B}(t)\} = \frac{d}{dt}\mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{B}(t) + \mathbf{A}(t) \cdot \frac{d}{dt}\mathbf{B}(t)$

ベクトル積 $\frac{d}{dt}\{\mathbf{A}(t) \times \mathbf{B}(t)\} = \frac{d}{dt}\mathbf{A}(t) \times \mathbf{B}(t) + \mathbf{A}(t) \times \frac{d}{dt}\mathbf{B}(t)$

2.2 線積分

ベクトル場

$$\mathbf{A}(x, y, z) = A_x(x, y, z)\mathbf{e}_x + A_y(x, y, z)\mathbf{e}_y + A_z(x, y, z)\mathbf{e}_z$$

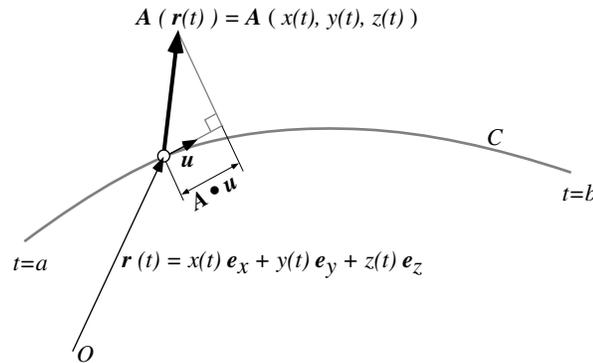
の中に曲線 C があるとする．その方程式が

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{e}_x + y(t)\mathbf{e}_y + z(t)\mathbf{e}_z$$

であるとし，曲線 C の始点が $t = a$ ，終点が $t = b$ に相当するとする．その単位接線ベクトルを $\mathbf{u}(t)$ としたとき，

$$\int_C \mathbf{A} \cdot \mathbf{u} \, dt = \int_a^b \mathbf{A}(x(t), y(t), z(t)) \cdot \mathbf{u}(t) \, dt$$

を \mathbf{A} の曲線 C に沿った線積分という．



接線ベクトル $\mathbf{u}(t)$ は，

$$\mathbf{u}(t) = \frac{d}{dt}x(t)\mathbf{e}_x + \frac{d}{dt}y(t)\mathbf{e}_y + \frac{d}{dt}z(t)\mathbf{e}_z$$

であるから，次式が成り立つ．

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{A} \cdot \mathbf{u} \, dt &= \int_a^b \left(A_x \frac{dx}{dt} + A_y \frac{dy}{dt} + A_z \frac{dz}{dt} \right) dt \\ &= \int_{x_a}^{x_b} A_x dx + \int_{y_a}^{y_b} A_y dy + \int_{z_a}^{z_b} A_z dz \end{aligned}$$

ここで， $x_a, x_b, y_a, y_b, z_a, z_b$ は $t = a, t = b$ のときの x, y, z の値である．

$$d\mathbf{r} = dx\mathbf{e}_x + dy\mathbf{e}_y + dz\mathbf{e}_z$$

を用いて，次のように表すことも多い．

$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

ベクトルの線積分は定義からわかるようにスカラーとなる．

2.3 面積分

ベクトル場 A における閉曲面 S について，曲面 S の法線ベクトルを n としたとき，曲面上における A の放線成分は

$$A_n = A \cdot n$$

で表される．曲面上の微小面積 ΔS_i と，そこにおける A の放線成分との積の和の極限值：

$$\lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \sum_i A_n \Delta S_i = \lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \sum_i A \cdot n \Delta S_i$$

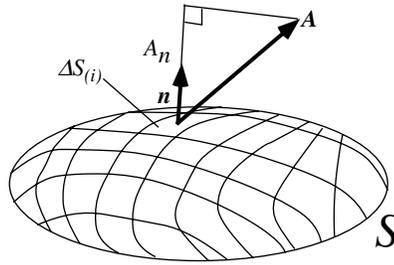
を

$$\int_S A \cdot n \, dS$$

または

$$\int_S A \cdot dS$$

と表し，ベクトル A の曲面 S 上の面積分という．



極限をとる前の一つの微小面積 ΔS_i について考えると，

$$A \cdot n \Delta S_i = A_x e_x \cdot n \Delta S_i + A_y e_y \cdot n \Delta S_i + A_z e_z \cdot n \Delta S_i$$

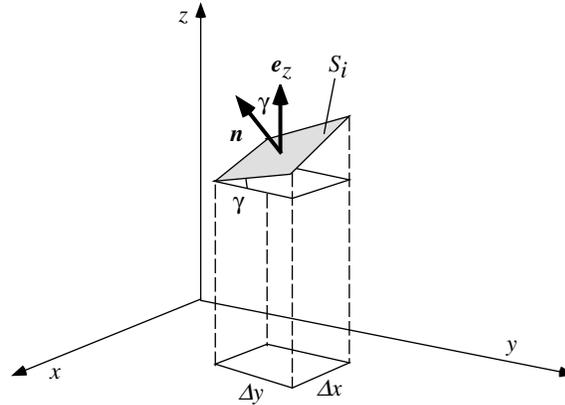
となる．ここで， A_z を含む第三項についてのみ注目すると， $|e_z| = |n| = 1$ であるから，

$$A_z e_z \cdot n \Delta S_i = A_z |e_z| |n| \cos \gamma \Delta S_i = A_z \cos \gamma \Delta S_i$$

となる． γ は z 軸と n とのなす角（または e_z と n のなす角）である．

上式における $\Delta S_i \cos \gamma$ は， ΔS_i の x - y 平面上への射影とみることができるので，

$$\Delta S_i \cos \gamma = \Delta x \Delta y$$



と書くことにする．これについて極限をとれば，

$$dS \cos \gamma = dx dy$$

となる．第一項，第二項についても同様に行うと，

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \Delta S_i \rightarrow A_x dy dz + A_y dz dx + A_z dx dy$$

とかける．従って，面積分を A の各成分について行うと次式のようになる．

$$\int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \int A_x dy dz + \int A_y dz dx + \int A_z dx dy$$

即ち， A の各成分の二重積分の和ということになる．ベクトルの面積分も線積分と同様にスカラー積の積分であるから，その積分値はスカラーとなる．

2.4 体積分

次式をもってベクトル $\mathbf{A}(x, y, z)$ の体積分という．

$$\int_V \mathbf{A} dv = \int A_x(x, y, z) dv \mathbf{e}_x + \int A_y(x, y, z) dv \mathbf{e}_y + \int A_z(x, y, z) dv \mathbf{e}_z$$

なお， V は積分を行う閉空間であり， dv は体積要素である．直角座標の場合は， $dv = dx dy dz$ である．右辺の各成分の積分は A_x, A_y, A_z の関数形が既知であれば，普通の多重積分（三重積分）の方法で積分することができる．

2.5 面積要素

面積分における面積要素 dS は、座標系によって異なっており、次のようになっている。

直角座標 (x, y, z)

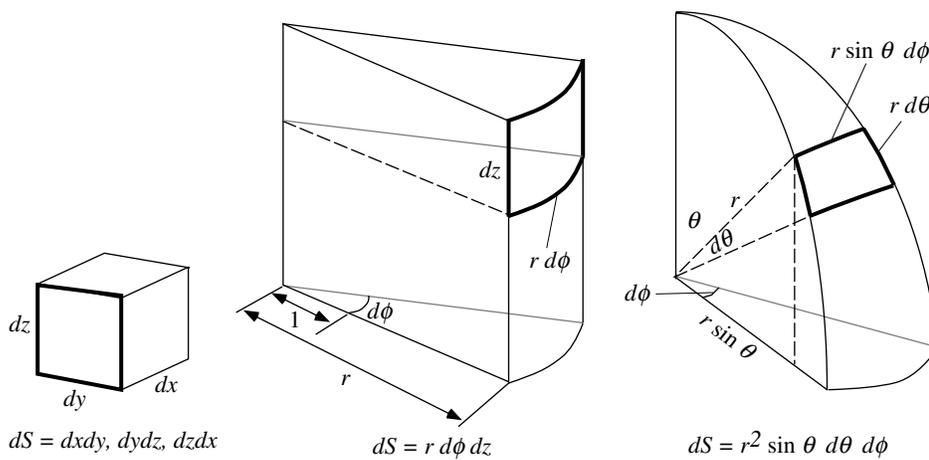
$$dS = dxdy, dydz, dzdx$$

円柱座標 (r, ϕ, z)

$$dS = rd\phi dz$$

球座標 (r, θ, ϕ)

$$dS = r^2 \sin \theta d\phi d\theta$$



2.6 体積要素

体積積分における体積要素 dv も、座標系によって異なっており、次のようになっている。

直角座標 (x, y, z)

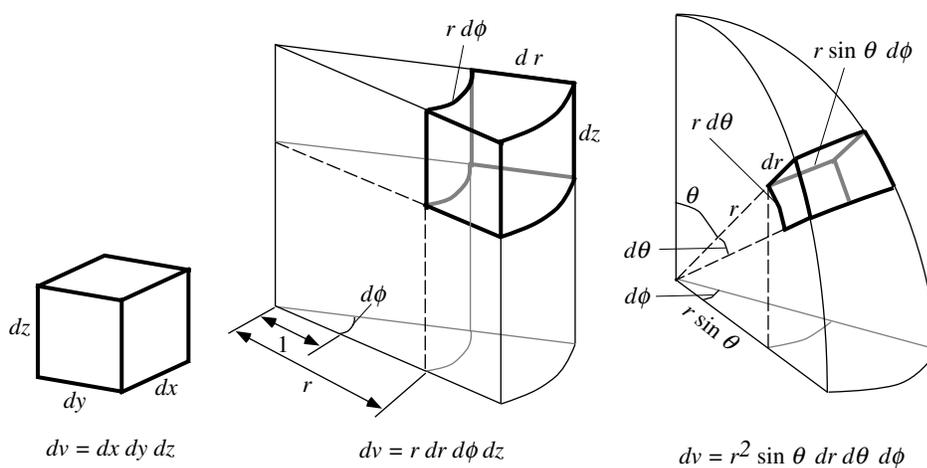
$$dv = dxdydz$$

円柱座標 (r, ϕ, z)

$$dv = r dr d\phi dz$$

球座標 (r, θ, ϕ)

$$dv = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$$



Chapter 3

ベクトル場の微分演算子

3.1 勾配

3.1.1 grad

スカラー関数 $\phi(x, y, z)$ に関する次のベクトルを、 ϕ の勾配という。

$$\text{grad } \phi = \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{e}_z$$

ここで、 ∇ はナブラという微分演算子である。

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z$$

勾配ベクトルは、スカラー場の次のような情報を有している。

方 向 ϕ の変化が最大となる方向で、 ϕ の増加する向き。

大きさ 単位変位距離当たりの ϕ の変化の大きさ。

3.1.2 スカラーポテンシャル

ベクトル関数 A に対して、

$$A = -\text{grad } \phi \quad (\text{or } -\nabla \phi)$$

なるスカラー関数 ϕ が存在するとき、 ϕ をベクトル A のスカラーポテンシャルという。例えば、電場 E に対する電位 (静電ポテンシャル) ϕ がこの関係に相当する。

ベクトル場 A がスカラーポテンシャル ϕ をもてば, A の線積分は ϕ の差で表される.

$$\int_a^b \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \phi(a) - \phi(b)$$

3.2 発散

3.2.1 div

ベクトル場 A に対して, 次のスカラー量をベクトル場 A の発散という.

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

発散はベクトル場の次のような情報を有している.

A を流体の速度ベクトルとすると, $\operatorname{div} A$ は, 単位時間あたりに単位体積中から流出する流体の量を表す.

3.2.2 Gauss の定理

閉曲面 S で囲まれた体積 V 内のベクトル A の発散 $\operatorname{div} A$ の体積分は A の S 上での面積分に等しい.

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{A} \, dV = \int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

3.3 回転 (rotation)

3.3.1 rot

ベクトル場 A に対して, 次のベクトル量をベクトル場 A の回転という.

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{A} &= \nabla \times \mathbf{A} \\ &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_z \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \end{aligned}$$

回転は, ベクトル場の次のような情報を有している.

ベクトル場 A が，流体の速度を表すとき，各点での $\text{rot } A$ の値は，渦の強さ（線積分を一回転したときの大きさ）を表す量となる．

3.3.2 Stokes の定理

閉曲線 C で囲まれた曲面 S 内のベクトル A の回転 $\text{rot } A$ の面積分は A の C に沿った線積分に等しい．

$$\int_S (\text{rot } A) \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_C A \cdot d\mathbf{r}$$

3.4 ラプラシアン

次の演算子をラプラシアンという．

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

スカラー関数に対しては， div grad をとったものとなる．

$$\Delta \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

ベクトル関数に対しては，それぞれの成分の div grad をとったものとなる．

$$\Delta \mathbf{A} = (\Delta A_x) \mathbf{e}_x + (\Delta A_y) \mathbf{e}_y + (\Delta A_z) \mathbf{e}_z$$

ここで，

$$\Delta A_i = \frac{\partial^2 A_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_i}{\partial z^2}$$

である．

3.5 ベクトル演算子の性質

3.5.1 grad

- $\text{grad } (f + g) = \text{grad } f + \text{grad } g$
 $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$

- $\text{grad}(cf) = c \text{grad } f$
 $\nabla(cf) = c\nabla f$
- $\text{grad}(fg) = (\text{grad } f)g + f \text{grad } g$
 $\nabla(fg) = (\nabla f)g + f\nabla g$

3.5.2 div

- $\text{div}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \text{div } \mathbf{A} + \text{div } \mathbf{B}$
 $\nabla \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \cdot \mathbf{B}$
- $\text{div}(\phi \mathbf{A}) = \text{grad } \phi \cdot \mathbf{A} + \phi \text{div } \mathbf{A}$
 $\nabla \cdot (\phi \mathbf{A}) = (\nabla \phi) \cdot \mathbf{A} + \phi \nabla \cdot \mathbf{A}$

3.5.3 rot

- $\text{rot}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \text{rot } \mathbf{A} + \text{rot } \mathbf{B}$
 $\nabla \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{B}$
- $\text{rot}(\phi \mathbf{A}) = \text{grad } \phi \times \mathbf{A} + \phi \text{rot } \mathbf{A}$
 $\nabla \times (\phi \mathbf{A}) = (\nabla \phi) \times \mathbf{A} + \phi \nabla \times \mathbf{A}$

3.5.4 ベクトル演算子の公式

- $\text{grad}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \text{grad}) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \text{grad}) \mathbf{A} + \mathbf{A} \times \text{rot } \mathbf{B} + \mathbf{B} \times \text{rot } \mathbf{A}$
- $\text{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \text{rot } \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \text{rot } \mathbf{B}$
- $\text{rot rot } \mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A}$
- $\text{rot}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} \text{div } \mathbf{B} - \mathbf{B} \text{div } \mathbf{A} + (\mathbf{B} \cdot \text{grad}) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \text{grad}) \mathbf{B}$

Chapter 4

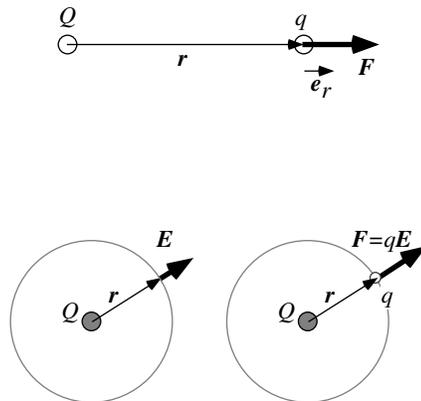
電場と静電ポテンシャル

4.1 クーロンの法則

電荷量が $q(\text{C})$, $Q(\text{C})$ の二つの点電荷が $r(\text{m})$ 離れているとき , 両者を結ぶ直線に沿って , 次の力 $F(\text{N})$ がその点電荷に作用する .

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2} e_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad \text{where} \quad e_r = \frac{\mathbf{r}}{r}$$

ここで , e_r は力と同じ方向の単位ベクトルである . $\epsilon_0(\text{F/m}=\text{CV}^{-1}\text{m}^{-1})$ は真空の誘電率である .



4.2 電場

電荷量 $q(\text{C})$ の点電荷をおいたときに、その電荷が力 $F(\text{N})$ を受けるとき、その空間には次式で表される電場 $E(\text{V/m})$ があるという。

$$F = qE$$

電荷量 $Q(\text{C})$ の点電荷が距離 r の位置に作る電場 $E(\text{V/m})$ は、次式で与えられる。

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^3} \mathbf{r}$$

4.3 Gauss の法則 (積分形)

一つの閉曲面内の総電荷を $Q(\text{C})$ とするとき、

- 電場 $E(\text{V/m})$ の閉曲面上の面積分は、 $Q/\epsilon_0(\text{Vm})$ に等しい。
- 電束密度 $D(\text{C/m}^2)$ の閉曲面上の面積分は、 $Q(\text{C})$ に等しい。電束密度 D と電場 E の関係は次の通り。電束密度の説明は [補足] 参照。

$$D = \epsilon_0 E$$

【一つの点電荷の場合】

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, dS = \frac{1}{\epsilon_0} Q \quad \int_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \, dS = Q$$

【多数の点電荷の場合】

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i Q_i \quad \int_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \, dS = \sum_i Q_i$$

【連続的な電荷分布の場合】(電荷の空間分布： $\rho(\mathbf{r})$)

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}) \, dV \quad \int_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_V \rho(\mathbf{r}) \, dV$$

4.4 Gaussの法則 (微分形)

Gaussの法則 (積分形) に Gaussの定理を適用する .

$$\int_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \operatorname{div} \mathbf{D} dV$$

これより , Gaussの法則は次のようになる .

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{D} dV = \int_V \rho(\mathbf{r}) dV$$

これより , 微小体積 dV における Gaussの法則 (微分形) は , 次のようになる .

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho(\mathbf{r})$$

4.5 静電ポテンシャル

4.5.1 電場と静電ポテンシャルの関係

万有引力とポテンシャルの間には次のような関係がある .

$$\mathbf{F} = -GmM \frac{\mathbf{r}}{r^3} \leftrightarrow \phi(\mathbf{r}) = -G \frac{mM}{r}$$

$$\mathbf{F} = -\operatorname{grad} \phi$$

同様の関係が , 電場と静電ポテンシャルにも当てはまる .

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \leftrightarrow \phi(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \phi$$

4.5.2 静電ポテンシャルの性質

このようなポテンシャルで表される保存場には次のような性質がある .

- 線積分は経路によらない

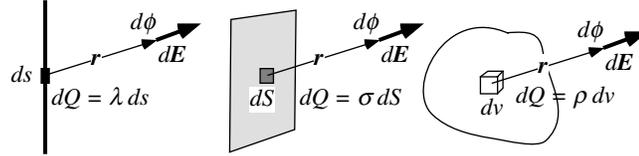
$$\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \phi(A) - \phi(B)$$

- もとの点に戻れば線積分はゼロ

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0 \leftrightarrow \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$$

4.6 基本電荷分布形状による電場と静電ポテンシャル

微小領域にある電荷 $dQ(\text{C})$ による電場成分 $dE(\text{V/m})$ とポテンシャル成分 $d\phi(\text{V})$ の重ね合わせ (積分) として考える. 従って, いかなる場合においても次式が基本となる.



【電場】

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ}{r^3} \mathbf{r}$$

【静電ポテンシャル】

$$d\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ}{r}$$

具体的に「線」「面」「体」については次のようになる.

【線状分布】線密度 $\lambda(\text{C/m})$ で線状に分布しているとする. 微小線要素 $ds(\text{m})$ に含まれる電荷は,

$$dQ = \lambda ds$$

であるから,

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\lambda}{r^3} \mathbf{r} ds \quad \phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\lambda}{r} ds$$

【面状分布】面密度 $\sigma(\text{C/m}^2)$ で面状に分布しているとする. 微小面積要素 $dS(\text{m}^2)$ に含まれる電荷は,

$$dQ = \sigma dS$$

であるから,

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma}{r^3} \mathbf{r} dS \quad \phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma}{r} dS$$

【体状分布】密度 $\rho(\text{C}/\text{m}^3)$ で体状に分布しているとする。微小体積要素 $dv(\text{m}^3)$ に含まれる電荷は、

$$dQ = \rho dv$$

であるから、

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho}{r^3} \mathbf{r} dv \quad \phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho}{r} dv$$

Chapter 5

静電場(その2)

5.1 Poisson の方程式

$\text{div } E = \rho/\epsilon_0$ および $E = -\text{grad } \phi$ より ,

$$\Delta\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

5.2 電気双極子

【電気双極子】正負の等量の電荷を持つ点電荷を微小距離 s だけ隔てておいたもの .

【電気双極子モーメント】負電荷から正電荷に向く微小ベクトルを s としたときの , 次のベクトル量 .

$$\mathbf{p} = qs$$

【電気双極子によるポテンシャル】注目する点から正 , 負電荷までの距離を r_1, r_2 としたとき ,

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right\}$$

【電気双極子による電場(近似式)】 $E = -\text{grad } \phi$ より ,

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ -\frac{\mathbf{p}}{r^3} + \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{p})}{r^5} \right\}$$

5.3 コンデンサ

5.3.1 静電容量

二個の導体間の電位差を 1V 上昇させるのに要する電荷量 . 単位 ($[F]=[C]/[V]$) .

$$C = \frac{Q}{V} \quad Q = CV$$

【孤立導体球】 半径 a , 無限遠を対向電極とする .

$$C = 4\pi\epsilon_0 a$$

【平行平板】 面積 S , 間隔 d

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$$

【同心球】 内半径 a , 外半径 b

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{b-a}$$

【同軸筒】 内半径 a , 外半径 b , 長さ $L (L \gg a)$

$$C = 2\pi\epsilon_0 \frac{L}{\ln(b/a)}$$

【平行導線】 半径 a , 間隔 d , 長さ $L (a \ll d, a \ll L)$

$$C = \frac{\pi\epsilon_0 L}{\ln(d/a)}$$

5.3.2 静電エネルギー

コンデンサに蓄えられるエネルギー .

$$U_e = \frac{1}{C}Q^2 \quad \frac{1}{2}CV^2 \quad \frac{1}{2}QV$$

片方の導体からもう片方の導体に微小電荷を多数移動させて $Q(C)$ にしたときの仕事量として導出 .

5.4 静電場のエネルギー

コンデンサに電荷が蓄えられると電場 E が生じる。静電エネルギーを E によって表した近接作用的記述。

$$U_e = \frac{Q^2}{2C} = \frac{(\epsilon_0 S E)^2}{2\left(\frac{\epsilon_0}{d} S\right)} = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 S d = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 v$$

電界が一様でない場合は、その微小部分の電界による成分の和とする。

$$U_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_V E^2 dv$$

Chapter 6

静磁場

6.1 Coulomb の法則

6.1.1 磁石

二つの磁荷 q_m と Q_m が $r(\text{m})$ 離れているとき，両者を結ぶ直線に沿って，次の力 $F(\text{N})$ がその磁荷に作用する．

$$F = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{q_m Q_m \mathbf{r}}{r^2 r}$$

6.1.2 電流の磁気作用

距離 $r(\text{m})$ だけ離れた二つの導線に $I_1, I_2(\text{A})$ の電流が流れているとき，導線には次の力が作用する．

$$F = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2 \mathbf{r}}{r r}$$

6.1.3 磁場

電流 $I_1(\text{A})$ が流れる導線をおいたときに，その導線が力 $F(\text{N})$ を受けるとき，その空間には次式で決まる磁場があるといい，磁束密度 $B(\text{T})$ で表す． $([\text{T}(\text{テスラ})]=[\text{Wb}(\text{ウェーバ})/\text{m}^2]=[10^{-4}\text{Gauss}]$ ， Wb は磁束 Φ の単位)

$$F = I_1 B$$

電流 I_2 (A) が流れる導線から距離 r (m) の位置に作る磁束密度 B (T) は，次式で与えられる．

$$B = \frac{\mu_0 I_2 r}{2\pi r r}$$

6.2 Gauss の法則

定常電流によって作られる磁束は常に閉曲線を作っている．これは，任意の閉曲面においてその閉曲面内に入った磁束は必ず，どこかから出ており，その収支はゼロであることを意味する．これを磁場に関するガウスの法則（積分形）という．

$$\int_{S_0} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

磁場に関するガウスの法則（微分形）は次式のようになる．

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$

これは，電場の場合の単一の電荷のように，磁場の場合の単一の磁荷というものが存在しないことを意味する（必ず対で存在する）．

6.3 Ampere の法則

電流 I がそのまわりに作る磁束密度を B とするとき，その電流 I を囲む任意の閉曲線上での B の線積分は， $\mu_0 I$ に等しい．

$$\int_{C_0} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 I$$

閉曲線を微小領域にとれば，次の微分形が得られる

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{i}$$

6.4 ベクトルポテンシャル

6.4.1 電場のスカラーポテンシャル

電場 E をスカラーポテンシャル ϕ を用いて，

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \phi$$

と表すことにより，電場の法則である

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0$$

を自動的に満たされている．

6.4.2 磁場のベクトルポテンシャル

磁束密度の法則では， $\text{rot } \mathbf{B} = 0$ とはならないため，スカラーポテンシャルなるものは定義できない．その代わりに，磁束密度 \mathbf{B} をベクトルポテンシャル \mathbf{A} を用いて，

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$$

と表すことにより，磁場の法則である

$$\text{div } \mathbf{B} = 0$$

を自動的に満たすことができ，電場 \mathbf{E} に対するスカラーポテンシャル ϕ のような働きをする．

6.5 Biot-Savart の法則

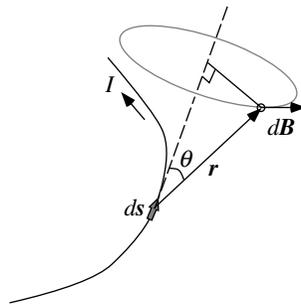
線状電流 I が流れる導線の微小部分 ds (電流方向を正とする) によって，そこから r だけ離れた点 P に生ずる磁場 $d\mathbf{H}$ は，次式で与えられる．

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{ds \times \mathbf{r}}{r^3}$$

ds と r のなす角を θ とすると，その大きさは，

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{ds \sin \theta}{r^2}$$

その方向は， ds と r が張る平面に垂直で，向きは Ampere の右ネジの法則に従う．



Chapter 7

静磁場(その2)

7.1 Poisson の方程式

7.1.1 電場に関する Poisson の方程式

任意の電荷密度分布 $\rho(\text{C}/\text{m}^3)$ によって形成される電場 $E(\text{V}/\text{m})$ は，静電ポテンシャル $\phi(\text{V})$ に関する Poisson の式：

$$\Delta\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

を解いて ϕ を求め，

$$E = -\text{grad } \phi$$

より，電場 E が求められる．

7.1.2 磁場に関する Poisson の方程式

任意の電流密度分布 $i(\text{A}/\text{m}^2)$ によって形成される磁束密度 $B(\text{Wb}/\text{m}^2)$ は，ベクトルポテンシャル $A(\text{Wb})$ に関する Poisson の式：

$$\Delta A = -\mu_0 i$$

を解いて A を求め，

$$B = \text{rot } A$$

より，磁束密度 B が求められる．電流が作る磁場は，電流経路を中心軸とした円周上にできるため，円柱座標系を用いることが多い．

$$\text{rot } A = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) \mathbf{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\phi + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (rA_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \phi} \right) \mathbf{e}_z$$

7.1.3 電場の Poisson の方程式の解

微小領域に存在する電荷量 $dQ(\text{C})$ による微小電場 $dE(\text{V/m})$ 及び微小ポテンシャル $d\phi(\text{V})$ の積分値として得られる (プリント第 4 章第 6 節参照) .

【電場】

$$\mathbf{E} = \int_V d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{dQ \mathbf{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{dv \rho \mathbf{r}}{r^3}$$

【ポテンシャル】

$$\phi = \int_V d\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{dQ}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{dv \rho}{r}$$

ここで， $\rho(\text{C/m}^3)$ は電荷密度であり，

$$dQ = dv \rho$$

である．

7.1.4 磁場の Poisson の方程式の解

微小領域における電流素片ベクトル $I ds(\text{Am})$ による微小磁束密度 $dB(\text{Wb/m}^2)$ 及び微小ベクトルポテンシャル $dA(\text{Wb})$ の積分値として得られる .

【磁場 (Biot-Savart の法則)】

$$\mathbf{B} = \int_V d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_C \frac{ds \mathbf{I} \times \mathbf{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{dv \mathbf{i} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

【ベクトルポテンシャル】

$$\mathbf{A} = \int_V d\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_C \frac{ds \mathbf{I}}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{dv \mathbf{i}}{r}$$

ここで, $i(\text{A/m}^2)$ は電流密度であり, 電流素片ベクトルは,

$$ds \mathbf{I} = ds dS \mathbf{i} = dv \mathbf{i}$$

である. なお, 電流 I をスカラーとし, その経路上の微小変位 ds をベクトルとして

$$ds \mathbf{I} = I ds$$

としてもよいが, dv はベクトルにできないので, 電流密度をベクトルとしている.

7.2 $\Delta A = -\mu_0 i$ の導出

ベクトルポテンシャル A を用いて

$$\mathbf{B} = \text{rot } A$$

と表される磁束密度 B を, Ampere の法則に代入すると,

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{i}$$

ここで, ベクトル公式;

$$\text{rot rot } A = \text{grad div } A - \Delta A$$

を用いると, Ampere の法則は, 次のようになる (これを (a) 式とする).

$$\text{grad div } A - \Delta A = \mu_0 \mathbf{i}$$

一方, $\mathbf{B} = \text{rot } A$ において, 次のように任意のスカラー関数 u の grad を付け足しても $\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{i}$ が成り立つ ($\text{rot grad} = 0$ のため) ため, 次のような A' も同じ B のポテンシャルとなる.

$$A' = A + \text{grad } u$$

スカラーポテンシャル ϕ に定数が付け足されていても grad をとって E を求めた時点でその定数の効果は消えてしまうのと同じである.

この u として, 次式を満たす χ を採用する.

$$\Delta \chi = -\text{div } A_0$$

ここで, A_0 は (a) 式を満たすものとする. この χ を用いた

$$A = A_0 + \text{grad } \chi$$

を (a) 式に代入すると, χ の選び方を上のようにしたので,

$$\text{div } A = \text{div } A_0 + \text{div grad } \chi = \text{div } A_0 + \Delta \chi = 0$$

となり, (a) 式は次のような Poisson の方程式になるのである.

$$\Delta A = -\mu_0 i$$

Chapter 8

真空以外の空間の電磁場

8.1 誘電体中の静電場

8.1.1 電場 E と電束密度 D

【真空中】

$$D = \epsilon_0 E$$

【誘電体中】

$$D = \epsilon E$$

8.1.2 境界条件

【法線方向】

電束密度 D の法線成分は連続

$$D_1 \cdot n - D_2 \cdot n = 0$$

電場 E の法線成分は不連続

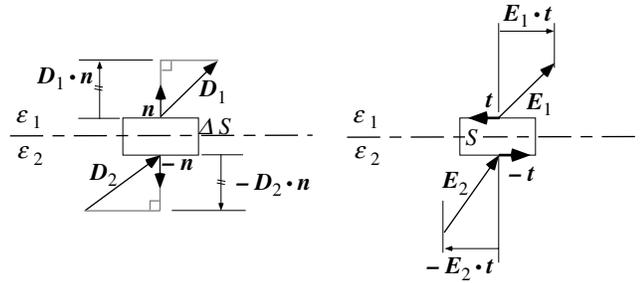
$$\epsilon_1 E_1 \cdot n - \epsilon_2 E_2 \cdot n = 0$$

【接線方向】電場 E の接線成分は連続

$$E_1 \cdot t + E_2 \cdot t = 0$$

電束密度 D の法線成分は不連続

$$\frac{D_1}{\epsilon_1} \cdot t + \frac{D_2}{\epsilon_2} \cdot t = 0$$



8.2 磁性体中の静磁場

8.2.1 磁場 H と磁束密度 B

【真空中】

$$B = \mu_0 H$$

【誘電体中】

$$B = \mu H$$

8.2.2 境界条件

【法線方向】

$$B_1 \cdot n - B_2 \cdot n = 0$$

または

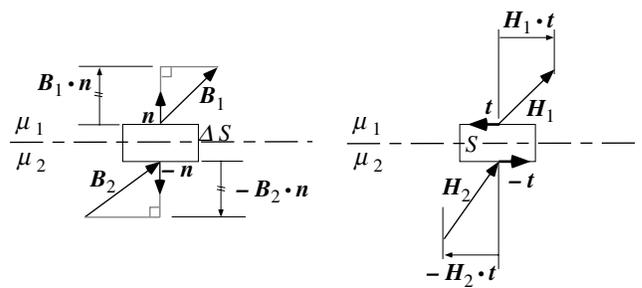
$$\mu_1 H_1 \cdot n - \mu_2 H_2 \cdot n = 0$$

【接線方向】

$$H_1 \cdot t + H_2 \cdot t = 0$$

または

$$\frac{B_1}{\mu_1} \cdot t + \frac{B_2}{\mu_2} \cdot t = 0$$



Chapter 9

電磁力

9.1 アンペールの力

【アンペールの力】

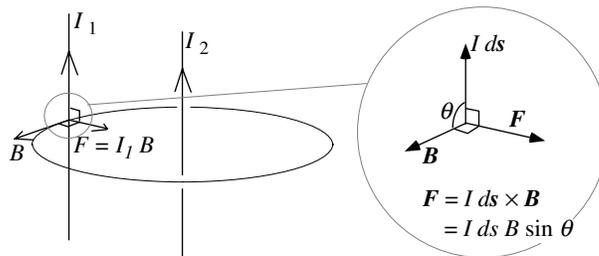
直線電流 I_2 の作る磁場 B に置かれたもう一つの直線電流 I_1 に作用する力

【大きさ】 $F = I_1 B$

【向き】 $I \times B$ の方向 .

【電流素片 $I ds$ に作用するアンペールの力】

$$d\mathbf{F} = I ds \times \mathbf{B}$$



9.2 ローレンツの力

【ローレンツの力】

速度 $v(\text{m/s})$ で運動する電荷量 $q(\text{C})$ の粒子に働く力

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

【電場による力】 $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$

【磁場による力】 $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$

9.2.1 磁場による力の導出

電流とは、断面 $S(\text{m}^2)$ を単位時間あたりに通過する電荷量のこと ($[A]=[C]/[s]$) である。荷電粒子の速度を $v(\text{m/s})$ とすると、一秒間に断面 S を通過した粒子は、 S から長さ $L(\text{m}) = v(\text{m/s}) \times 1(\text{s})$ の導線内に全て収まっているはずであるから、その個数は $nSL = nSv$ (個) である。ここで、 $n(\text{個}/\text{m}^3)$ は荷電粒子の密度である。従って、電荷量は $q(\text{C})$ をかけて、

$$I = qnvS$$

次に、長さ ds の領域を考え、その中の荷電粒子の一個に作用する力を出してみる。 ds 全体に及ぼされる力は、アンペールの力から、

$$d\mathbf{F} = Ids \times \mathbf{B}$$

この式の I として、先の粒子の流れから導出した電流を用いると、

$$d\mathbf{F} = qnSv ds \times \mathbf{B} = qnS ds \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

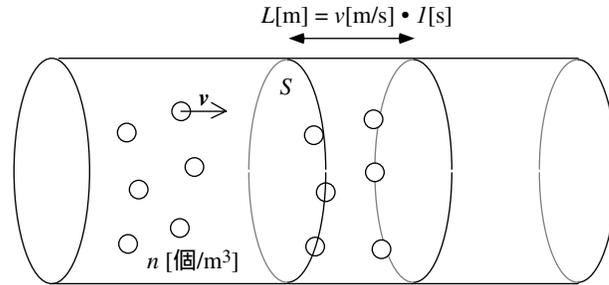
ds 内に含まれる粒子の数は、 $nSds$ 個であるから、これで割ると一個当たりの力になる。

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

9.3 磁荷

9.3.1 磁荷

電荷と異なり、片方の極性の磁荷が存在することは確かめられていない。必ず正負の磁荷が対で存在する（磁石の N 極と S 極）。



しかし，その正負の磁荷の距離が十分離れていれば，磁石の片方を単独磁荷と近似的にみなすことができ，電荷で成立したのと類似の法則が成立する．磁荷を認めた場合，電場における電位のように，磁場についても磁位が定義できる．

9.3.2 磁荷の Coulomb の法則

二つの磁荷 $q_m(\text{Wb})$ と $Q_m(\text{Wb})$ が $r(\text{m})$ 離れているとき，両者を結ぶ直線に沿って，次の力 $F(\text{N})$ がその磁荷に作用する．

$$F = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{q_m Q_m}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$$

9.3.3 磁場 H

磁場の強さ $H(\text{N/Wb}$ または $\text{A/m})$ は，磁荷 $q_m(\text{Wb})$ をおいた時に働く力 $F(\text{N})$ によって決められる．

$$F = q_m H$$

9.3.4 磁荷の作る磁場と磁位

点磁荷 $Q_m(\text{Wb})$ が作る磁場の強さは $H(\text{A/m})$ は，次のようになる．

$$H = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{Q_m}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$$

電場 $E(\text{V/m})$ に対する電位 $\phi_e(\text{V})$ と同様に，磁位 $\phi_m(\text{A})$ は，次のようになる．

$$\phi_m = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{Q_m}{r}$$

9.3.5 磁気双極子

【磁気双極子】正負等量の磁荷を持つ点磁荷を微小距離 s だけ隔てておいたもの。

【磁気双極子モーメント】負磁荷から正磁荷に向く微小ベクトルを s としたときの、次のベクトル量。

$$\mathbf{m} = q_m s$$

【磁気双極子による磁位】

$$\phi_m = \frac{q_m}{4\pi\mu_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

$r \gg l$ の時の近似式

$$\phi_m = \frac{q_m l \cos \theta}{4\pi\mu_0 r^2}$$

【磁気双極子による磁場 (近似式)】

$$\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi\mu_0} \left[-\frac{\mathbf{m}}{r^3} + \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{m})}{r^5} \right]$$

円柱座標系では、磁位の $-\text{grad}$ をとって、

$$H_r = -\frac{\partial \phi_m}{\partial r} = \frac{2ql}{4\pi\mu_0} \frac{2 \cos \theta}{r^3}$$

$$H_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi_m}{\partial \theta} = \frac{2ql}{4\pi\mu_0} \frac{\sin \theta}{r^3}$$

9.3.6 アンペールの等価磁石の法則

ある点 P から円電流 $I(\text{A})$ を見込む立体角が $\omega(\text{str})$ のとき、その点での磁位 $\phi_m(\text{A})$ は、

$$\phi_m = \frac{I\omega}{4\pi}$$

9.3.7 円電流と磁気双極子の比較

円電流の作る磁場は $a \ll r$ のとき，

$$\omega \approx \pi \frac{a^2}{r^2} \cos \theta$$

を用いて

$$\phi_m = \frac{Ia^2}{4r^2} \cos \theta$$

一方，磁気双極子による磁位は， $l \ll r$ のとき，

$$\phi_m = \frac{2ql}{4\pi\mu_0 r^2} \cos \theta$$

両者を比較すると，磁気双極子 $m = 2ql$ は電流 I は次の関係を有する等価な磁場源であることが分かる．

$$m = \mu_0 IS$$

ここで， $S = \pi a^2$ で円電流の面積である．ここでは触れないが， S は任意の形状に取れることが知られている．

Chapter 10

時間的に変動する場

10.1 静電場の基本法則

【電場に関する Gauss の法則】

$$\int_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \, dS = Q \quad \leftrightarrow \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho$$

【磁場に関する Gauss の法則】

$$\int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, dS = 0 \quad \leftrightarrow \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$

【電場に関する無名の法則】

$$\int_C \mathbf{E} \cdot \mathbf{u} \, ds = 0 \quad \leftrightarrow \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0}$$

【磁場に関するアンペールの法則】

$$\int_C \mathbf{H} \cdot \mathbf{u} \, ds = I \quad \leftrightarrow \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{i}$$

10.2 $\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{i}$ の一般化

【静電磁場】

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{i}$$

【動電磁場】

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

10.2.1 なぜ $\partial \mathbf{D} / \partial t$ が必要か

rot $\mathbf{H} = \mathbf{i}$ の div をとった時に不具合が生じるため .

$$\text{div rot } \mathbf{H} = \text{div } \mathbf{i}$$

ここで , 左辺の div rot は恒等的にゼロになる演算子であるから ,

$$\text{div } \mathbf{i} = 0$$

となる .

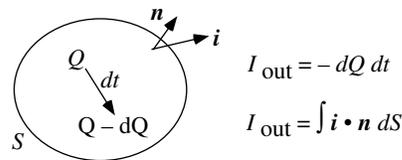
【定常電流の時】

電流の湧き出しや吸い込みが無い場合 , $\text{div } \mathbf{i} = 0$ で OK (定常電流保存則) .

【一般電流の時】

電流の湧き出しや吸い込みがあるとき , $\text{div } \mathbf{i} \neq 0$ だめ .

では , どうするか ?



電流の湧き出しや吸い込みがあるとき , 即ち電荷の生成や消滅があるとき , は次式が成立しているはずである (S の表面を通して電流が出れば (電荷が出れば) , S 内部の電荷量はその分だけ減少する) .

$$-\frac{dQ}{dt} = \int_S \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} dS$$

これを微小体積 dV について書き直せば (Gauss の発散定理を使って体積分化) ,

$$-\frac{d\rho}{dt} = \text{div } \mathbf{i}$$

を得る (電荷保存則) .

ここで , $\text{div } \mathbf{D} = \rho$ であったことを利用すると ,

$$\text{div } \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \mathbf{D} = 0$$

とかけるので，アンペールの法則として，

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

としておけば，div をとっても，電荷保存則が成立し，矛盾が解決する．

10.3 rot $E = 0$ の一般化

【静電磁場】

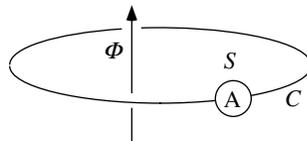
$$\text{rot } \mathbf{E} = 0$$

【動電磁場】

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

10.3.1 なぜ $\partial \mathbf{B} / \partial t$ が必要か

閉回路を貫く磁束の時間変化によって誘導起電力が発生することによる．



【ファラデーの法則】

誘導起電力 V は，回路を貫く磁束 Φ の時間的变化に比例する（磁束の単位に Wb を用いれば，比例定数が無次元の 1 になる）．

【レンツの法則】

誘導起電力 V 及び誘導電流は，それによって新しく生ずるべき磁束が，もともとその回路を貫いている磁束 Φ の変化を妨げる向きに生ずる．

$$V = -\frac{d\Phi}{dt}$$

これを書き直すと，動電磁場における一般法則が出てくる．

磁束 Φ を磁束密度 \mathbf{B} で表す

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS$$

起電力を E で表す

$$V = \int_{-C} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_S (\text{rot } \mathbf{E}) \cdot \mathbf{n} dS$$

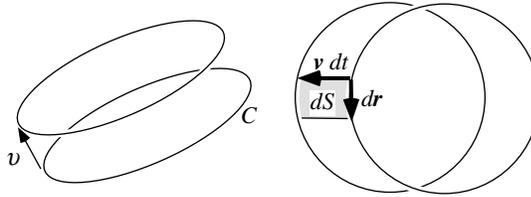
これらより,

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

を得る.

10.4 運動する導線について

閉回路 C が静電磁場中を変位した場合にも磁束 Φ の時間変化が生じ, 変動電磁場と同様の法則変形が必要.



図中の C が速度 v で動くとしたとき, C 上の線素片 dr が dt の間になぞる面素片 dS は, $dS = |(\mathbf{v} dt) \times d\mathbf{r}|$ であるから, そこを貫く磁束 $d\Phi$ は,

$$\begin{aligned} d\Phi &= \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS \\ &= \int_S \mathbf{B} \cdot |(\mathbf{v} dt) \times d\mathbf{r}| \\ &= \int_S \mathbf{B} \cdot (\mathbf{v} dt \times d\mathbf{r}) \\ &= -dt \oint_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{r} \end{aligned}$$

即ち,

$$-\frac{d\Phi}{dt} = \oint_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{r}$$

ここで, ファラデー・レンツの電磁誘導の式

$$-\frac{d\Phi}{dt} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$$

より，次式を得る．

$$\mathbf{E} = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

なお， \mathbf{B} の時間変化と C の変位の両方があるときは，両者による起電力の和が全起電力となる．

$$V = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \oint_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{r}$$

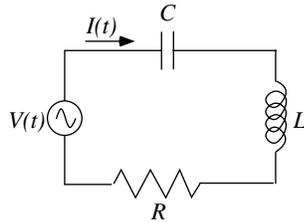
10.5 交流理論

荷電粒子の移動による電流の変動が変位電流よりも小さく無視できるときの理論．

コイルに発生する起電力は，コイルを貫く磁束の時間変化に比例する $V \propto -d\Phi/dt$ ．磁束 Φ はアンペールの法則によりコイルに流れる電流に近似的に比例する $\Phi \propto I$ よって，コイルに流れる電流 $I_L(t)$ と電圧 $V_L(t)$ の関係は次のようになる．

$$V_L(t) = -L \frac{d}{dt} I(t)$$

$L(\text{H})$ をコイルの自己インダクタンスという．



図のような回路の方程式は，次のようになる．

$$RI = V(t) + \frac{Q}{C} - L \frac{dI}{dt}$$

電源電圧が $V(t) = V_0 \cos \omega t$ とすると，両辺を微分した形では，

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = -\omega V_0 \sin \omega t$$

となる．

Chapter 11

電磁気学の基本法則

11.1 Maxwellの方程式

【Maxwellの方程式】

$$\operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}, t), \quad (11.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (11.2)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)}{\partial t}, \quad (11.3)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{i}(\mathbf{x}, t). \quad (11.4)$$

【電磁束密度と電磁場の強度】

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}, \quad (11.5)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}. \quad (11.6)$$

【運動方程式】

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = e \mathbf{E} + e \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (11.7)$$

11.2 エネルギー保存則

【要旨】

点電荷系の全エネルギーと電磁場のエネルギーの和の単位時間当たりの減少量は，単位時間当たりにその系外に出て行くエネルギーに等しい．

【表式】

$$-\frac{d}{dt} \left(\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 + W \right) = \int \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} dS \quad (11.8)$$

【点電荷系の全エネルギー】

$$\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

【電磁場のエネルギー】

$$W = \int \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) dV$$

【ポインティングベクトル】

単位時間，単位面積を通過して系外に出て行くエネルギー

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

11.2.1 導出

運動方程式からはじまる

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = e \mathbf{E} + e \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

両辺に \mathbf{v} をかけて， $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ を使う

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} m v^2 = e \mathbf{v} \cdot \mathbf{E} + e \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = e \mathbf{v} \cdot \mathbf{E} = \int_V \mathbf{i} \cdot \mathbf{E} dV$$

 \mathbf{i} は一個の点電荷の移動による電流密度である．Maxwell の方程式の一つ；

$$\text{rot } \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{i}$$

を使うと，

$$-\frac{d}{dt} \frac{1}{2} m v^2 = - \int_V \left(\text{rot } \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{E} dV$$

さらに，

$$\text{div} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot \text{rot } \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \text{rot } \mathbf{H}$$

を使うと,

$$-\frac{d}{dt} \frac{1}{2} m v^2 = \int_V \left\{ -\mathbf{H} \cdot \text{rot } \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \mathbf{E} + \text{div} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \right\} dV$$

ここで,

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

を使うと,

$$-\frac{d}{dt} \frac{1}{2} m v^2 = \int_V \left[\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right] dV + \int_V \text{div} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dV$$

ここで,

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) = \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

を使い ($\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$ と $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ を使っている), Gauss の定理で右辺を面積分に変えると,

$$-\frac{d}{dt} \frac{1}{2} m v^2 = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \int_V (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) dV \right) + \int_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS$$

移項して,

$$-\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) dV \right) = \int_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS$$

多数の点電荷の場合には, 次のようになる.

$$-\frac{d}{dt} \left(\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 + \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) dV \right) = \int_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS$$

11.3 電磁ポテンシャル

【静電磁場のポテンシャル】

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \phi$$

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$$

【静電磁場の Poisson の方程式】

$$\begin{aligned}\Delta\phi &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \Delta A &= -\mu_0 i\end{aligned}$$

【動電磁場のポテンシャル】

$$\begin{aligned}E &= -\frac{\partial A}{\partial t} - \text{grad } \phi \\ B &= \text{rot } A\end{aligned}$$

【動電磁場の Poisson の方程式】

$$\begin{aligned}\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)A &= -\mu_0 i \\ \text{div } A + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} &= 0\end{aligned}$$

11.3.1 $-\partial A/\partial t$ 追加の理由

【問題点】

$\text{rot } E = -\partial B/\partial t$ なので, $-\text{grad } \phi$ だけだと, $\text{rot } E = 0$ となって, 都合が悪い.

【解決法】

$B = \text{rot } A$ を $\text{rot } E = -\partial B/\partial t$ に入れてみる. と,

$$\text{rot} \left(E + \frac{\partial A}{\partial t} \right) = 0$$

これと, $\text{rot } E = 0$ とを比較すると, E に相当するのが, $E + \partial A/\partial t$ となっている. これより,

$$E = -\text{grad } \phi - \frac{\partial A}{\partial t}$$

とするのが妥当.

11.3.2 動電磁場の Poisson の方程式導出

電磁ポテンシャル ϕ と A を用いて

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$$

とおくと, Maxwell の方程式の内の次の二つが自動的にみたされる.

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \quad \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

残りの二つの式は,

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho \quad \text{rot } \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{i}$$

第二の式を \mathbf{B} と \mathbf{E} で表しておく.

$$\text{rot } \mathbf{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{i}$$

この式に電磁ポテンシャル表記の \mathbf{E} と \mathbf{B} を代入する.

$$\text{rot rot } \mathbf{A} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad } \phi \right) = \mu_0 \mathbf{i}$$

ここで, ベクトル公式

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A}$$

を使うと, 次式を得る.

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{A} - \text{grad} \left(\text{div } \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = -\mu_0 \mathbf{i}$$

これを \mathbf{A} に関する Poisson の方程式のひながたとする.

次に, 第一式 $\text{div } \mathbf{D} = \rho$ に電磁ポテンシャル表記の \mathbf{E} を代入する.

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi - \frac{\partial}{\partial t} \left(\text{div } \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

これを ϕ に関する Poisson の方程式のひながたとする.

上記ひながたをローレンツゲージ変換という手法を用いて簡単化する．電磁ポテンシャルは任意の関数 u を用いて次のようにもとの電磁ポテンシャルに付け足しを加えても，得られる電磁場は同じであることを利用する．

$$\begin{aligned} A^L &= A_0 + \text{grad } u \\ \phi^L &= \phi_0 - \frac{\partial u}{\partial t} \end{aligned}$$

ここで， A_0 と ϕ_0 はひながたの解であるとする．

u として次のような χ を用いると，ある条件のもとで，式が簡単化される．

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \chi = - \left(\text{div } A_0 + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi_0}{\partial t} \right)$$

このような χ を用いると，ひながたの第二項目の () 内は，

$$\text{div } A_0 + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi_0}{\partial t} = \text{div } A + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \Delta \chi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0$$

となって求めるべき次式が得られるのである．

$$\begin{aligned} \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) A &= -\mu_0 i \end{aligned}$$

ひながたの第二項目の () 内をゼロにする χ を選ぶということは，次の A と ϕ が次の条件を満たすことという条件に相当する．

$$\text{div } A + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

Appendix A

補足

A.1 微分

A.1.1 微分係数

微分係数 (または導関数) とは , 関数の変化率 (傾き) のことを意味しており , 関数を $y = f(x)$ とすると , その微分係数は , 次のように定義される .

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

または

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

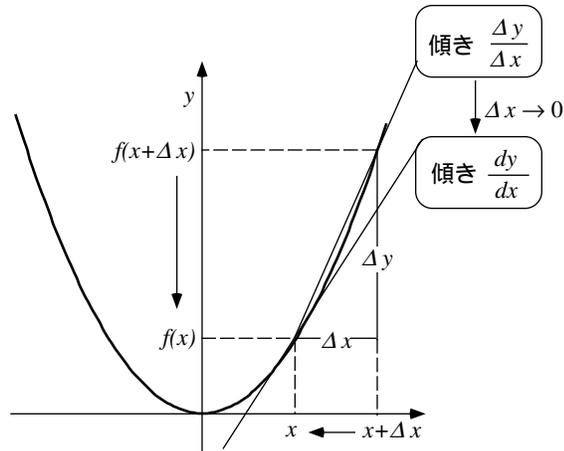
これを

$$\frac{df(x)}{dx}, \frac{df}{dx}, \frac{dy}{dx}, f'(x), f'$$

とかく . また , 次のような書き方もある .

$$\frac{d}{dx}f(x), \frac{d}{dx}f$$

これは , ある関数を「微分する」という操作を演算子とその関数のまえに書き「演算子を関数に作用させる」という意味で使われる . $\frac{d}{dx}$ は微分演算子とよばれ , ベクトル関数の場合には , 微分演算子として , grad , div , rot , Δ などがある .



A.1.2 微分の性質

線形性

$$\frac{d}{dx}(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha \frac{df(x)}{dx} + \beta \frac{dg(x)}{dx}$$

積の微分

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = \frac{df(x)}{dx}g(x) + f(x)\frac{dg(x)}{dx}$$

商の微分

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\frac{df(x)}{dx}g(x) - f(x)\frac{dg(x)}{dx}}{g(x)^2}$$

合成関数の微分

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = \frac{df(g(x))}{dg(x)} \frac{dg(x)}{dx}$$

逆関数の微分

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

媒介変数による微分 $x = x(t)$, $y = y(t)$ ならば

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

二回微分

$$\frac{d}{dx} \frac{df}{dx} = \frac{d^2}{dx^2} f = \frac{d^2 f}{dx^2}$$

A.1.3 微分の応用

微分係数は、関数の変化率を表す。従って、微分係数の符号から関数の変化の具合がある程度わかる。

$dy/dx > 0$ ↗	$d^2y/dx^2 > 0$ ↘ ↗
$dy/dx < 0$ ↘	$d^2y/dx^2 < 0$ ↗ ↘

極大(凸)関数 $y = f(x)$ の x が正の方向に変化したとき、

$$\frac{dy}{dx} > 0 (\text{y increases}) \rightarrow \frac{dy}{dx} < 0 (\text{y decreases})$$

となれば、その間で関数は凸型になっている。また、上記のように微分係数が減少する変化していることから、その変化率に相当する $\frac{dy}{dx}$ の微分係数(二次微分係数)は次のようになっているはずである。

$$\frac{d^2y}{dx^2} < 0$$

極小(凹)関数 $y = f(x)$ の x が正の方向に変化したとき、

$$\frac{dy}{dx} < 0 (\text{y decreases}) \rightarrow \frac{dy}{dx} > 0 (\text{y increases})$$

となれば、その間で関数は凹型になっている。また、この場合には、二次微分係数は次のようになっている。

$$\frac{d^2y}{dx^2} > 0$$

極値 どちらの場合も、極大値、極小値をとるときには

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

となっている。ただし、その逆は真ではない。

変極点 (増加傾向 減少傾向) 二次微分係数が次のように変化した場合、傾きが増加傾向 傾きが減少傾向の変化が生じていることになる (二次微分係数がゼロになったところを変極点という)

$$\frac{d^2y}{dx^2} > 0 \rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} < 0$$

変極点 (減少傾向 増加傾向) 二次微分係数が次のように変化した場合、傾きが減少傾向 傾きが増加傾向の変化が生じていることになる (二次微分係数がゼロになったところを変極点という)

$$\frac{d^2y}{dx^2} < 0 \rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} > 0$$

A.1.4 偏微分

二つ以上の独立変数をもつ関数について、どれか一つの独立変数のみに関する微分係数を偏微分係数 (偏導関数) という。偏微分係数を求める操作を偏微分するという。 $z = f(x, y)$ とすると、その偏微分係数は次のように定義される。

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

偏微分係数の書き方形式。

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y), \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial x} f$$

A.2 積分

A.2.1 不定積分

関数 f が、関数 g の導関数であるとき、 g を f の不定積分という。

$$g(x) = \int f(x) dx$$

定数の微分はゼロとなるため、不定積分には定数の自由度がある。

A.2.2 積分性質

$$\text{線形性} \quad \int \{af(x) + bg(x)\} dx = a \int f(x) dx + b \int g(x) dx + c$$

$$\text{置換積分} \quad \int f(x) dx = \int f(x(t)) \frac{dx}{dt} dt + c$$

$$\text{部分積分} \quad \int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx + c$$

A.2.3 変数変換による積分

電磁気学の問題では $\sqrt{x^2 + a^2}$ を分子や分母に含む関数の積分が出てくる。その際によく使われる手法を以下に記す（これと同時に、三角関数の相互変換や上記の部分積分の知識も必要となる）

三角関数による置換

$$x = a \tan \theta, \quad \sqrt{x^2 + a^2} = \frac{a}{\cos \theta}, \quad \frac{dx}{d\theta} = \frac{a}{\cos^2 \theta}$$

有理関数化

$$\sqrt{x^2 + a^2} = t - x, \quad x = \frac{t^2 - a^2}{2t}, \quad \sqrt{x^2 + a^2} = \frac{t^2 + a^2}{2t}, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{t^2 + a^2}{2t^2}$$

A.2.4 定積分（一重積分）

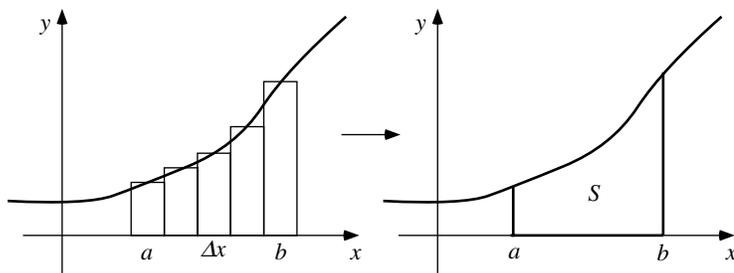
関数 $f(x)$ を区間 $a \leq x \leq b$ で連続な関数であるとする、この区間を n 個の小さな区間 I_1, I_2, \dots, I_n に分割し、区間の長さを $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ とする。各区間 I_i のなかの任意の点を x_i とし、

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i$$

を求める。このとき、分割を細かくしていったとき、 S_n の極限が存在すれば、

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

で表し、これを $f(x)$ の $x = a$ から $x = b$ までの定積分という。



A.2.5 重積分

関数 $f(x,y)$ の x,y 平面上におけるある領域 D 内での積分を

$$\iint_D f(x,y) \, dx dy$$

または

$$\int_D f(x,y) \, dx dy$$

と書く。関数 $f(x,y,z)$ の x,y,z 空間内におけるある領域 D 内での積分を

$$\iiint_D f(x,y,z) \, dx dy dz$$

または

$$\int_D f(x,y,z) \, dx dy dz$$

とかく。

A.2.6 累次積分

重積分は次のようにして積分することが可能な場合が多い。

$$\iint f(x,y) \, dx dy = \int \left\{ \int f(x,y) \, dx \right\} dy$$

または

$$= \int \left\{ \int f(x,y) \, dy \right\} dx$$

即ち、どちらかの変数に関してさきに積分し、その積分後の関数をもう一つの変数で積分すればよい。出来ないのは、 $\{ \}$ で囲まれた積分が存在しない場合である。上記のような積分を次のように表すこともある。

$$\int dy \int f(x,y) dx$$

または

$$\int dx \int f(x,y) dy$$

上記の積分方法は z 軸が関与する場合にも適用できる。

A.2.7 変数分離形

非積分関数が $f(x)g(y)$ や $f(x)g(y)h(z)$ のように各パラメータの関数の積で表されるときは、それぞれの積分の積で求められる。

$$\int f(x)g(y) dx dy = \left\{ \int f(x) dx \right\} \left\{ \int g(y) dy \right\}$$

$$\int f(x)g(y)h(z) dx dy dz = \left\{ \int f(x) dx \right\} \left\{ \int g(y) dy \right\} \left\{ \int h(z) dz \right\}$$

A.3 勾配に関する補足

ベクトル場 A がスカラーポテンシャル ϕ をもてば、 A の線積分は ϕ の差で表されることを示す。

$$\int_a^b A \cdot dr = \int_a^b d\phi = \phi(a) - \phi(b)$$

なぜならば

$$\begin{aligned} \nabla\phi \cdot dr &= \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial\phi}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial\phi}{\partial z} \mathbf{e}_z \right) \cdot (dx\mathbf{e}_x + dy\mathbf{e}_y + dz\mathbf{e}_z) \\ &= \frac{\partial\phi}{\partial x} dx + \frac{\partial\phi}{\partial y} dy + \frac{\partial\phi}{\partial z} dz = d\phi \end{aligned}$$

A.4 発散に関する補足

A.4.1 発散演算子の導出

本文にて,

A を流体の速度ベクトルとすると, $\text{div } A$ は, 単位時間あたりに単位体積中から流出する流体の量を表す.

とあったが, 上記の性質を有することを以下に示す.

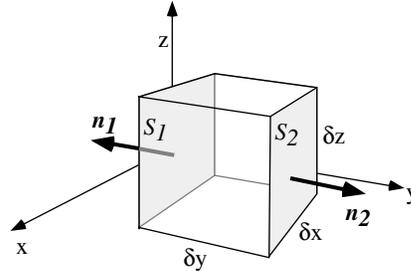
閉曲面 S で囲まれた領域の体積 V からのベクトル A の流出量は次式で与えられる.

$$\int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS$$

これを単位体積あたりに直し (V で割る), その体積を無限小にしたときの $V \rightarrow 0$ の極限を考えると, ある点からの流出ということになり, $\text{div } A$ の意味するところとなるはずである. 即ち,

$$\text{div } A = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS$$

となるはずである. これを示そう.



微小体積として $V = \delta x \delta y \delta z$ を考える. 以下では, y 成分のみを考える (他の成分についても同様となる). 図中の S_1 の面を通るベクトル量の y 成分は,

$$\int_{S_1} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \{\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}\} \delta x \delta z = A_y(x, y, z) n_1 \delta x \delta z$$

対面の S_2 の面を通るベクトル量の y 成分は,

$$\int_{S_2} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \{\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}\} \delta x \delta z = A_y(x, y + \delta y, z) n_2 \delta x \delta z$$

となる .

ベクトル A の体積 V での y 成分の増加分は (ただし , $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2$ で , $|\mathbf{n}_1| = |\mathbf{n}_2| = 1$ である .)

$$\begin{aligned} \int_{S_1} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}_1 dS_1 + \int_{S_2} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}_2 dS_2 + &= A_y(x, y, z) n_1 \delta x \delta z + A_y(x, y + \delta y, z) n_2 \delta x \delta z \\ &= \{A_y(x, y + \delta y, z) - A_y(x, y, z)\} \delta x \delta z \\ &= \frac{A_y(x, y + \delta y, z) - A_y(x, y, z)}{\delta y} \delta x \delta y \delta z \\ &= \frac{\partial A_y(x, y, z)}{\partial y} V \end{aligned}$$

x, z 成分についても同様に , 行うことができ , まとめると .

$$\begin{aligned} \int_S (\mathbf{A} \cdot \mathbf{n})_x dS &= \frac{\partial A_x}{\partial x} V \\ \int_S (\mathbf{A} \cdot \mathbf{n})_y dS &= \frac{\partial A_y}{\partial y} V \\ \int_S (\mathbf{A} \cdot \mathbf{n})_z dS &= \frac{\partial A_z}{\partial z} V \end{aligned}$$

従って ,

$$\begin{aligned} &\lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS \\ &= \lim_{V \rightarrow 0} \left\{ \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right\} \\ &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \end{aligned}$$

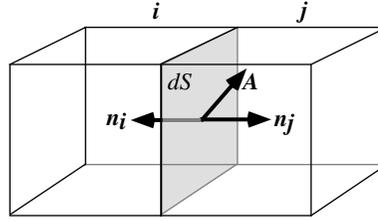
A.4.2 ガウスの発散定理の説明

上記の微小体積 $V_i = \delta x_i \delta y_i \delta z_i$ において ,

$$\int_{S_i} \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{n}_i dS = \delta x_i \delta y_i \delta z_i \operatorname{div} \mathbf{A}_i$$

である . 全体の V は , この V_i が集まって出来上がっている .

$$\sum_i \int_{S_i} \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{n}_i dS = \sum_i \delta x_i \delta y_i \delta z_i \operatorname{div} \mathbf{A}_i$$



集めるときに，隣り合った V_i と V_j について注目すると，その境界面では，法線ベクトルがお互いに逆向きになっているため，

$$\mathbf{n}_i = -\mathbf{n}_j$$

である．また，境界面上では， $A_i = A_j$ であるから，

$$A_i \cdot \mathbf{n}_i + A_j \cdot \mathbf{n}_j = 0$$

となる．従って， V_i を寄せ集めたあとに残る発散成分は，隣りの V_j がない部分，即ち V の表面からの発散成分のみとなる．よって，ガウスの発散定理

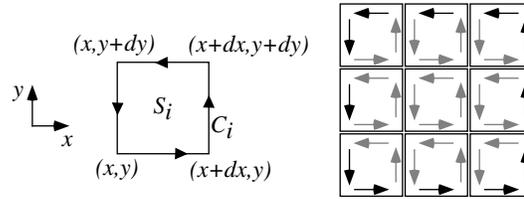
$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{A} \, dV = \int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

が成り立つのである．

A.4.3 Stokes の定理の説明

面 S を分割し，その一つの微小面積 S_i を考える． S_i の法線方向を z 軸に選び， x, y 軸を図のようにとる． S_i の囲む閉曲線 C_i 上での線積分を考える．

$$\begin{aligned} \int_{C_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= A_x(x, y, z)dx + A_y(x + dx, y, z)dy \\ &\quad - A_x(x, y + dy, z)dx - A_y(x, y, z)dy \\ &= \frac{\partial A_y}{\partial x} dx dy + A_x(x, y, z)dx + A_y(x, y, z)dy \\ &\quad - \frac{\partial A_x}{\partial y} dx dy - A_y(x, y, z)dy - A_x(x, y, z)dx \\ &= \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} - \frac{\partial A_y}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \int_{S_i} (\operatorname{rot} \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} \, dS \end{aligned}$$



ここで，隣り合った S_i と S_j の境界線上の線積分の方向は，お互いに反対であるため，その和をとるとゼロになる．残るのは，隣の無い境界線上の線積分のみとなる．これより，Stokes の定理が得られる．

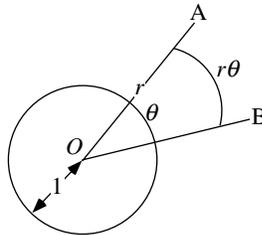
$$\int_S (\text{rot } A) \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_C A \cdot d\mathbf{r}$$

A.5 立体角

A.5.1 二次元の角度 (弧度)

半径 1 の円の中心からみた弧の長さ θ (radian) .

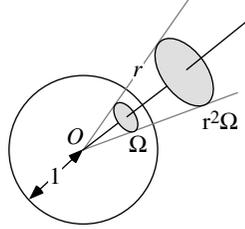
- 中心から距離 r 離れると弧の長さは $r\theta$ となる .



A.5.2 三次元の角度 (立体角)

半径 1 の球の中心からみたときにその球面を占める面積 Ω (steradian) (視野の広がり)

- 中心から距離 r 離れると面積は $r^2\Omega$ となる .

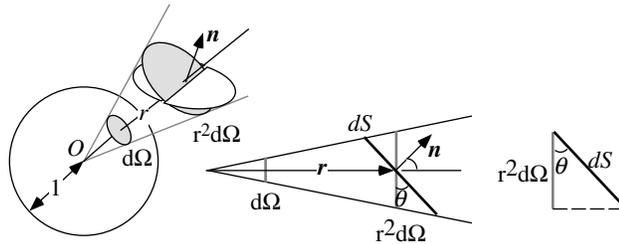


A.5.3 微分立体角 $d\Omega$ と面積要素 dS の関係

面積積分を行うときの面積要素 dS と微分立体角 $d\Omega$ の間には次の関係が成り立つ。

$$d\Omega = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} dS$$

dS が中心から r 離れており, dS は $d\Omega$ に対して θ だけ傾いているとする。す



ると, $r^2 d\Omega$ は dS の射影になるから,

$$dS \cos \theta = r^2 d\Omega$$

ここで, dS の単位放線ベクトルを \mathbf{n} ($|\mathbf{n}| = 1$), dS の位置ベクトルを \mathbf{r} ($|\mathbf{r}| = r$) とすると,

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = r \cos \theta$$

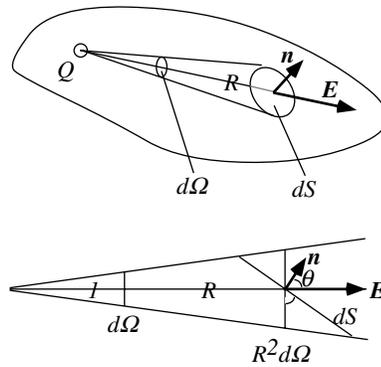
であるから, 次式を得る。

$$d\Omega = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} dS$$

A.6 ガウスの法則の証明

図より,

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = |\mathbf{E}| \cos \theta dS$$



立体角 $d\Omega$ を用いると，

$$dS \cos \theta = R^2 d\Omega$$

であるから，上式は次のようになる．

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS &= |\mathbf{E}| R^2 d\Omega \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} R^2 d\Omega \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega \end{aligned}$$

従って，閉曲面上で積分すると，次のようになる．

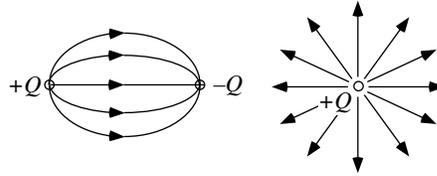
$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_S d\Omega \\ &= \frac{Q}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

ここで， $\int_S d\Omega = 4\pi$ である．

A.6.1 電束（または電気力線）と電束密度について

電束（一般に Ψ と記す）とは，直接計測にかかる物理量ではないが，次のようなものとして導入される．

- 1C の正電荷から 1 本出る
- 1C の負電荷へは 1 本入る



電束の単位は電荷と同じ C となり，出る，入るによる正負の符号はあるが，方向を持たないスカラー量である．

一方，電束密度とはその面密度であり，記号と単位は $D(C/m^2)$ となる．これについては，電束が伸びている方向を持ったベクトル量としている．電束線が単位ベクトル n の方向を向いており，その方向に垂直な微小面積 $dS(m^2)$ を $d\Psi(C)$ の電束が貫いているとき，次のように定義できる．

$$D = \frac{d\Psi}{dS} n$$

A.6.2 電束密度と電場の関係 ($D = \epsilon_0 E$)

電束密度を上記のように導入すると，Gauss の法則から $D = \epsilon_0 E$ の式が次のようにして導出される．

点電荷 $Q(C)$ が半径 r の球面で囲まれているとき，電束は放射状に点電荷から出て，一様な電束密度 $D(C/m^2)$ で球面を垂直に貫く（対称性より）．従って， D の球面上での積分値は Q に等しい．

$$Q = \int_S D \cdot n \, dS = 4\pi r^2 |D| = 4\pi r^2 D$$

これより， $D = Q/(4\pi r^2)$ となるから， D の単位方向ベクトルを r/r で表すと，次のようになる．

$$D = \frac{Q}{4\pi r^2} \frac{r}{r}$$

一方，点電荷がつくる電場は，

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{r}{r}$$

であるから，両者を比較すると，次式を得る．

$$D = \epsilon_0 E$$

A.7 誘電体中の静電場の境界条件

A.7.1 法線方向

境界で図のような円筒 S を考える． Gauss の法則より，

$$\int_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{V_S} \rho dv$$

これを ϵ_1 側の底面 ΔS_1 と ϵ_2 側の底面 ΔS_2 と S の側面 ΔS_d における積分に分割すると，

$$\int_{\Delta S_1} \mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{n}_1 dS + \int_{\Delta S_2} \mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{n}_2 dS + \int_{\Delta S_d} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{V_S} \rho dv$$

$\Delta S_1, \Delta S_2$ を微小にとれば，その領域内で $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2$ は一定と見なせるので，積分値は，(大きさ)×(面積)で表される．また，同時に S の厚みを $d \rightarrow 0$ とすれば，側面での積分値はゼロ， $\Delta S_1 = \Delta S_2 = \Delta S$ ， $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2 = \mathbf{n}$ となる．従って，

$$\mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{n} \Delta S - \mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{n} \Delta S = \rho \Delta S$$

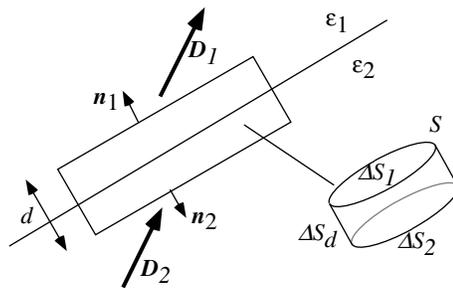
となり，

$$(\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) \cdot \mathbf{n} = \rho$$

を得る．これより，

【境界に電荷があるとき】電束密度 \mathbf{D} の法線方向は境界で ρ だけ不連続となる．

【境界に電荷がないとき】電束密度 \mathbf{D} の法線方向は境界で連続となる． $\mathbf{D}_i = \epsilon_i \mathbf{E}_i$ であるから，電場 \mathbf{E} は ϵ が異なれば，一般には不連続となる．



A.7.2 接線方向

境界で図のような閉曲線 C を考える． $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ より，

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot \mathbf{u} ds = 0$$

これを ε_1 側の線分 ΔL_1 と ε_2 側の底面 ΔL_2 と二つの境界をまたぐ線分 ΔL_d (行きと帰り両方) とに分割すると，

$$\int_{\Delta L_1} \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{u}_1 ds + \int_{\Delta L_2} \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{u}_2 ds + \int_{\Delta L_d} \mathbf{E} \cdot \mathbf{u} ds = 0$$

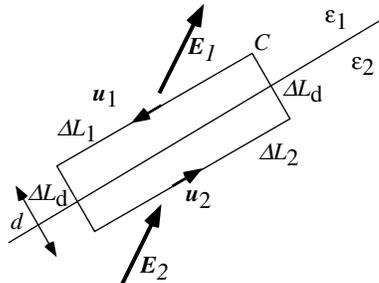
$\Delta L_1, \Delta L_2$ を微小にとれば，その線分上で $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$ は一定と見なせるので，積分値は，(大きさ)×(長さ)で表される．また，同時に ΔL_d の長さを $d \rightarrow 0$ とすれば，境界をまたぐ積分値はゼロ， $\Delta L_1 = \Delta L_2 = \Delta L$ ， $\mathbf{u}_1 = -\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}$ となる．従って，

$$\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{u} \Delta L - \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{u} \Delta L = 0$$

となり，

$$(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \cdot \mathbf{u} = 0$$

を得る．これより，電場 \mathbf{E} の接線方向は，電荷の有無によらず，境界で連続である．また， $\mathbf{E}_i = \mathbf{D}_i / \varepsilon_i$ であるから，電束密度 \mathbf{D} は ε が異なれば，一般には不連続となる．



A.8 磁性体中の静磁場の境界条件

A.8.1 法線方向

境界で図のような円筒 S を考える．Gauss の法則より，

$$\int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

これを μ_1 側の底面 ΔS_1 と μ_2 側の底面 ΔS_2 と S の側面 ΔS_d における積分に分割すると,

$$\int_{\Delta S_1} \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{n}_1 dS + \int_{\Delta S_2} \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n}_2 dS + \int_{\Delta S_d} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

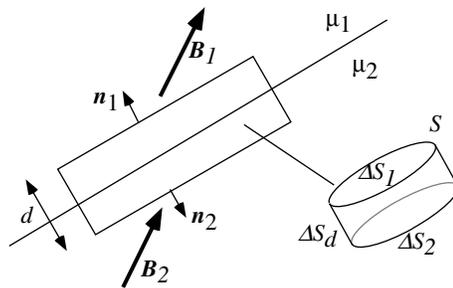
$\Delta S_1, \Delta S_2$ を微小にとれば, その領域内で $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2$ は一定と見なせるので, 積分値は, (大きさ) \times (面積) で表される. また, 同時に S の厚みを $d \rightarrow 0$ とすれば, 側面での積分値はゼロ, $\Delta S_1 = \Delta S_2 = \Delta S, \mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2 = \mathbf{n}$ となる. 従って,

$$\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{n} \Delta S - \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n} \Delta S = 0$$

となり,

$$(\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) \cdot \mathbf{n} = 0$$

を得る. これより, 磁束密度 \mathbf{B} の法線方向は, 境界の電流の有無によらず, 境界で連続である. また, $\mathbf{B}_i = \mu_i \mathbf{H}_i$ であるから, 磁場 \mathbf{H} は μ が異なれば, 一般には不連続となる.



A.8.2 接線方向

境界で図のような閉曲線 C を考える. $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{i}$ より, 境界で電流密度 \mathbf{i} が無ければ,

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot \mathbf{u} ds = \int_S \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} dS$$

これを μ_1 側の線分 ΔL_1 と μ_2 側の底面 ΔL_2 と二つの境界をまたぐ線分 ΔL_d (行きと帰り両方) とに分割すると,

$$\int_{\Delta L_1} \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{u}_1 ds + \int_{\Delta L_2} \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{u}_2 ds + \int_{\Delta L_d} \mathbf{H} \cdot \mathbf{u} ds = 0$$

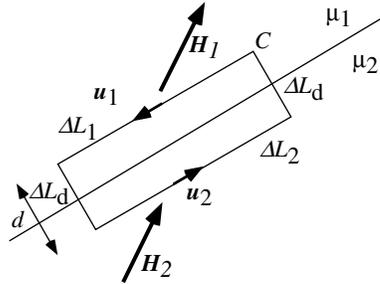
$\Delta L_1, \Delta L_2$ を微小にとれば, その線分上で H_1, H_2 は一定と見なせるので, 積分値は, (大きさ) \times (長さ) で表される. また, 同時に ΔL_d の長さを $d \rightarrow 0$ とすれば, 境界をまたぐ積分値はゼロ, $\Delta L_1 = \Delta L_2 = \Delta L, u_1 = -u_2 = u$ となる. 従って,

$$H_1 \cdot u \Delta L - H_2 \cdot u \Delta L = 0$$

となり,

$$(H_1 - H_2) \cdot u = 0$$

を得る. これより, 電場 E の接線方向は境界で連続である. また, $H_i = B_i / \mu_i$ であるから, 磁束密度 B は μ が異なれば, 一般には不連続となる.



A.8.3 境界面に電流密度がある時

境界で図のような e_h 方向の閉曲線 $C(ABCD)$ と e_t 方向の閉曲線 $C'(A'BCD')$ を考える. 電流密度はそれぞれの方向の成分に分けて,

$$i = i_h e_h + i_t e_t$$

としておく.

閉曲線 C に関しては, $\text{rot } H = i$ より,

$$\oint_C H \cdot e_t ds = \int_S i \cdot (-e_h) dS$$

上節と同様に $d \rightarrow 0$ とすると,

$$H_1 \cdot e_t \Delta L - H_2 \cdot (-e_t) \Delta L = -i_h \Delta L$$

となり,

$$(H_1 - H_2) \cdot e_t = -i_h$$

を得る．これより，磁場の e_t 方向には $-i_h$ の不連続がある．
同様に，閉曲線 C' に関しては，

$$\oint_{C'} \mathbf{H} \cdot \mathbf{e}_h ds = \int_S \mathbf{i} \cdot (-\mathbf{e}_t) dS$$

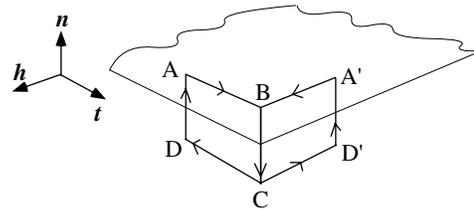
これより，

$$(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \cdot \mathbf{e}_h = -i_t$$

を得る．これより，磁場の e_h 方向には $-i_t$ の不連続がある．
以上をまとめると，磁場の接線に関しては，

$$(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \times \mathbf{e}_n = -\mathbf{i}$$

となり，磁場 \mathbf{H} が電流密度 \mathbf{i} だけの不連続を持つ．



A.9 異なる座標系の微分演算子の表式

【直角座標 (x, y, z) 】

- $\text{grad } V = \frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{e}_z$
- $\text{div } \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$
- $\text{rot } \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_z$

【円柱座標 (r, ϕ, z) 】

- $\text{grad } V = \frac{\partial V}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{e}_z$
- $\text{div } \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$
- $\text{rot } \mathbf{A} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) \mathbf{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\phi + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \phi} \right) \mathbf{e}_z$

【球座標 (r, θ, ϕ) 】

- $\text{grad } V = \frac{\partial V}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi$
- $\text{div } \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(A_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$
- $\text{rot } \mathbf{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial(A_\phi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \right) \mathbf{e}_r$
 $\quad + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\theta$
 $\quad + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_\phi$

A.10 演習問題 1 (ベクトル解析 1)

15, Oct., 1999

1. 次式を証明せよ .

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$$

2. $\mathbf{A} = 3\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y + 2\mathbf{e}_z$, $\mathbf{B} = 2\mathbf{e}_x + 3\mathbf{e}_y - \mathbf{e}_z$, $\mathbf{C} = 4\mathbf{e}_y - 3\mathbf{e}_z$ であるとき , 次の計算を行え .

$$\mathbf{A} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}), \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}), \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}), (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$$

3. \mathbf{A} と \mathbf{B} がつぎのようなベクトルであるとき , \mathbf{A} の \mathbf{B} への射影ベクトル , および \mathbf{A} と \mathbf{B} のなす角を求めよ .

$$\mathbf{A} = 3\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y + \sqrt{3}\mathbf{e}_z, \mathbf{B} = 3\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y - \sqrt{3}\mathbf{e}_z$$

4. 円柱座標系 (r, ϕ, z) の単位ベクトル $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_z$ を直角座標系 (x, y, z) のパラメータと単位ベクトルで表せ .

5. 球座標系 (r, θ, ϕ) の単位ベクトル $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi$ を直角座標系 (x, y, z) のパラメータと単位ベクトルで表せ .

A.11 演習問題 2 (ベクトルの微積分)

22, Oct., 1999

1. 【線積分】ベクトル量

$$A = 4xy\mathbf{e}_x - 8y\mathbf{e}_y + 2\mathbf{e}_z$$

を次の経路で線積分した値を求めよ。

- (a) $y = 2x, z = 0$ に沿って, $(3, 6, 0)$ から $(0, 0, 0)$ まで
- (b) $y = 2x, z = 2x$ に沿って, $(0, 0, 0)$ から $(3, 6, 6)$ まで
- (c) $x^2 + y^2 = 4, z = 0$ に沿って, $(2, 0, 0)$ から $(2, 0, 0)$ まで一回転

2. 【面積分】次の面積分の値を求めよ。

- (a) $A = x^2\mathbf{e}_x + xy\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$ を xy, yz, zy の三平面, 及び $x = 2, y = 2, z = 2$ の三平面で囲まれた立方体の表面上で。
- (b) $A = z\mathbf{e}_z$ を $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ なる球面上で。
- (c) $\frac{\mathbf{r}}{r^3}$ を $x^2 + y^2 + z^2 = a$ なる球面上で。ただし, \mathbf{r} は球面上の点の位置ベクトルで $r = |\mathbf{r}|$ である。

3. 【体積分】

- (a) 球座標系で質量密度 $\rho(r, \theta, \phi) = r$ なる半径 a の $\frac{1}{8}$ 球の質量 M を求めよ。
- (b) 円柱座標系で質量密度 $\rho(r, \theta, z) = e^{-r^2}$ なる半径 a , 長さ L の円柱の質量 M を求めよ。

4. 【電磁気によく出てくる積分】以下の不定積分の等式を導出せよ。

- (a) $\int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{2} \left\{ x\sqrt{x^2 + a^2} + a^2 \ln|x + \sqrt{x^2 + a^2}| \right\}$
- (b) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2 + a^2}|$

$$(c) \int \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} dx = \sqrt{x^2+a^2}$$

$$(d) \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}} dx = \frac{1}{2} \left\{ x\sqrt{x^2+a^2} - a^2 \ln|x + \sqrt{x^2+a^2}| \right\}$$

$$(e) \int \frac{1}{(x^2+a^2)^{3/2}} dx = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$(f) \int \frac{x}{(x^2+a^2)^{3/2}} dx = -\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$(g) \int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{3/2}} dx = -\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} + \ln|x + \sqrt{x^2+a^2}|$$

A.12 演習問題 3 (ベクトル演算子)

29, Oct., 1999

1. 【勾配, 発散, 回転】

次の関係式を導け (A は定ベクトル)

$$(i) \operatorname{grad} r = \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (ii) \operatorname{grad} \frac{1}{r} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (iii) \operatorname{div} \frac{\mathbf{r}}{r} = 0 \quad (iv) \operatorname{rot} \frac{\mathbf{A} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

2. 【ベクトル演算子の公式】

次の公式を導出せよ.

$$(a) \operatorname{grad} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{A} + \mathbf{A} \times \operatorname{rot} \mathbf{B} + \mathbf{B} \times \operatorname{rot} \mathbf{A}$$

$$(b) \operatorname{div} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{B}$$

$$(c) \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A}$$

$$(d) \operatorname{rot} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} \operatorname{div} \mathbf{B} - \mathbf{B} \operatorname{div} \mathbf{A} + (\mathbf{B} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{B}$$

3. 【Gauss の定理の確認と面積分の練習】

次のようなベクトル場と領域が与えられたとして, 下記の Gauss の定理の右辺と左辺を別々に計算し, 一致することを確かめよ.

$$\int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_V \operatorname{div} \mathbf{A} \, dV$$

$$(a) \text{ベクトル場: } \mathbf{A} = x^2 \mathbf{e}_x + xy \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z$$

領域: $x = 0, 2, y = 0, 2, z = 0, 2$ で囲まれた六面体

$$(b) \text{ベクトル場: } \mathbf{A} = x^2 \mathbf{e}_x + z \mathbf{e}_y + yz \mathbf{e}_z$$

領域: $x = 0, 1, y = 0, 1, z = 0, 1$ で囲まれた六面体

$$(c) \text{ベクトル場: } \mathbf{A} = 6z \mathbf{e}_x + (2x + y) \mathbf{e}_y - x \mathbf{e}_z$$

領域: $x^2 + y^2 = 3^2, x = 0, y = 0, z = 0, y = 8$ で囲まれた 1/4 柱.

$$(d) \text{ベクトル場: } \mathbf{A} = x^2 \mathbf{e}_x - xy \mathbf{e}_y + z^2 \mathbf{e}_z$$

領域: $x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1$ なる円柱.

4. 【Stokes の定理の確認】

次のようなベクトル場と領域が与えられたとして，下記の Stokes の定理の右辺と左辺を別々に計算し，一致することを確認せよ。

$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_S \text{rot } \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

- (a) ベクトル場： $\mathbf{A} = 2y\mathbf{e}_x + 3x\mathbf{e}_y - z^2\mathbf{e}_z$
領域：閉曲面 $S: x^2 + y^2 + z^2 = 9$ ($z \geq 0$)，境界 $C: x^2 + y^2 = 9$ ($z = 0$)
- (b) ベクトル場： $\mathbf{A} = y\mathbf{e}_x + (x^2 + z)\mathbf{e}_y + y\mathbf{e}_z$
領域：閉曲面 $S: x^2 + y^2 \leq 9$ ($z = 0$)，境界 $C: x^2 + y^2 = 9$ ($z = 0$)

A.13 演習問題 4 (静電場と静電ポテンシャル)

5, Nov., 1999

以下の条件で電場 $E(\text{V/m})$ と電位 $\phi(\text{V})$ を求めよ .

1. 【微小電荷の重ね合わせ】

- (a) 一様な線密度 $\lambda(\text{C/m})$ の電荷が図のように z 軸上の $\pm L(\text{m})$ に直線状に分布しているとき , $z = 0$ の平面上で直線から距離 $a(\text{m})$ だけ離れた点で .
- (b) 一様な線密度 $\lambda(\text{C/m})$ の電荷が図のように z 軸を中心とした半径 $a(\text{m})$ の円形状に分布しているとき , z 軸上で円の中心から距離 $z(\text{m})$ だけ離れた点で .
- (c) 一様な面密度 $\sigma(\text{C/m}^2)$ の電荷が図のように z 軸を中心とした半径 $a(\text{m})$ の円盤状に分布しているとき , z 軸上で円盤から距離 $z(\text{m})$ だけ離れた点で .

2. 【 Gauss の法則 】

- (a) 半径 $R_1, R_2(\text{m})$ の同心球殻状 ($0 < R_1 < R_2$) に電荷 $Q_1, Q_2(\text{C})$ が一様に分布しているとき , 中心から $r(\text{m})$ だけ離れた点で ($\phi(\infty) = 0$ とする).
- (b) 一様な面密度 $\rho_1, \rho_2(\text{C/m}^2)$ の電荷が図のように z 軸を中心とする無限に長い半径 $R_1, R_2(\text{m})$ の同軸円筒状 ($0 < R_1 < R_2$) に分布しているとき , z 軸から $r(\text{m})$ だけ離れた点で ($\phi(R_2) = 0$ とする).
- (c) z 軸を中心とする無限に長い半径 $a, b(\text{m})$ の同軸円筒 ($0 < a < b$) で挟まれた空間に , 密度 $\rho(r, \phi) = r^{-1} \cos^2 \phi (\text{C/m}^3)$ なる電荷が分布しているとき , z 軸から $r(\text{m})$ だけ離れた点で ($\phi(b) = 0$ とする).

A.14 演習問題 5 (コンデンサと静電場エネルギー)

12, Nov., 1999

1. 【電気双極子】

電気双極子 $p = qs$ がその中点から r だけ離れた点に作る静電ポテンシャルと電場を求めよ.

2. 【コンデンサの容量】

次のコンデンサの静電容量を表す式を導出せよ.

(a) 孤立導体球 (直径 a , 電荷量 Q , 無限遠を対向電極)

$$C = 4\pi\epsilon_0 a$$

(b) 孤立導線 (半径 a , 長さ $2L$)

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0 L}{\ln\left(\frac{L + \sqrt{L^2 + a^2}}{a}\right)}$$

(c) 平行平板 (面積 S , 単位面積当たりの電荷密度 σ)

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$$

(d) 同心球殻 (内半径 a , 外半径 b ($0 < a < b$), 電荷量 Q)

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{b-a}$$

(e) 同心円筒 (内半径 a , 外半径 b , 単位長さ当たりの電荷密度 λ , 長さ L)

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(b/a)}$$

(f) 平行線 (半径 a , 間隔 d ($d \gg a$), 長さ L ($L \gg a$), 単位長さ当たりの電荷密度 λ)

$$C = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln(d/a)}$$

3. 【 静電場のエネルギー 】

- (a) 半径 $a(\text{m})$ の球殻状に分布する電荷 (総量 $Q(\text{C})$) による静電場のエネルギーを求めよ .
- (b) 半径 $a(\text{m})$ の球状に分布する電荷 (総量 $Q(\text{C})$) による静電場のエネルギーを求めよ .

A.15 演習問題 6 (静磁場)

26, Nov., 1999

1. 【無限に長い直線電流による磁場】

無限に長い半径 $a(\text{m})$ の直線導線に $I(\text{A})$ が流れているとき, 導線から距離 $x(\text{m})$ の位置にできる磁場 $B(\text{T})$ が次式で与えられることを示せ.

導線内:

$$B = \frac{\mu_0 I x}{2\pi a^2} \quad (r \leq a)$$

導線外:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \quad (r \geq a)$$

2. 【有限長さの直線電流による磁場】

有限長さの直線電流が中心軸より $x(\text{m})$ の距離に作る磁場が次式で与えられることを示せ. なお, 導線の両端と磁場を求めようとする点とのなす角を θ_1, θ_2 とする.

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi x} (\cos \theta_1 + \cos \theta_2)$$

3. 【円電流による磁場】

半径 $a(\text{m})$ の円電流 $I(\text{A})$ による中心軸上の点に生ずる磁場は中心から $z(\text{m})$ の距離の点では次式で与えられることを示せ.

$$B = \frac{a^2 \mu_0 I}{2(a^2 + z^2)^{3/2}}$$

4. 【有限長さのソレノイドによる磁場】

軸上の点の磁場は, 単位長さ当たりの巻き数を n , その点とソレノイドの近いほうの端, 遠いほうの端を結ぶ直線が中心軸となす角を θ_1, θ_2 とすると, 次式で与えられることを示せ (円電流による磁場の重ね合わせ).

$$B = \frac{n\mu_0 I}{2} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1)$$

5. 【長方形電流による磁場】

二辺の長さが $2a, 2b(\text{m})$ の長方形の回路に電流 $I(\text{A})$ が流れているとき、回路の中心から垂直に距離 $z(\text{m})$ の点 P の磁場を求めよ (有限長の直線電流による磁場の重ね合わせ)。

6. 【うず電流による磁場】

細い導線を一つの円 (半径 $R(\text{m})$) の平面内に平面うず巻型に巻き、その一端は円の中心 O に他端は円周上にあり、半径方向の単位長さにつき n 巻きとし、電流 I を流すとき、中心軸上で円からの距離が $h(\text{m})$ の点 P における磁束密度が次式で与えられることを示せ。

$$B = \frac{n\mu_0 I}{2} \left\{ \ln \left(\frac{R + \sqrt{R^2 + h^2}}{h} - \frac{R}{\sqrt{R^2 + h^2}} \right) \right\}$$

A.16 演習問題7 (静磁場その2)

3, Dec., 1999

1. 【有限長直線電流によるベクトルポテンシャル】

有限長さの直線電流が中心軸より x (m) の距離に作るベクトルポテンシャル A (Wb) が次式で与えられることを示し, それを用いて磁束密度 B (Wb/m²) を求めよ. なお, 導線の両端と磁場を求めようとする点とのなす角を θ_1, θ_2 とする.

$$A = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \left(\frac{\sqrt{x^2 + L_1^2} + L_1}{\sqrt{x^2 + L_2^2} - L_2} \right) e_z$$

2. 【二本の平行無限長平行電流によるベクトルポテンシャル】

間隔 $2d$ (m) の無限長平行導線に電流 I (A) を逆向きに流すときに生ずるベクトルポテンシャル A (Wb) が次式で与えられることを示し, それを用いて磁束密度 B (Wb/m²) を求めよ.

$$A = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r_1}{r_2} e_z$$

A.17 演習問題 8 (真空以外の空間の電磁場)

3, Dec., 1999

1. 【誘電体で覆われた孤立導体球コンデンサ】

半径 $a(\text{m})$ の孤立導体球のまわりの半径 $b(\text{m})$ 以内を誘電率 ε の誘電体で覆ったときの球の容量を求めよ .

2. 【誘電体をはさんだ平行平板コンデンサ】

次のような誘電率分布を持つ誘電体を平行平板電極 (電極間隔 $d(\text{m})$) ではさんだコンデンサの単位面積当たりの容量を求めよ . $x(\text{m})$ は片方の電極からの距離である .

$$\varepsilon(x) = \varepsilon_1 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \frac{x}{d}$$

3. 【誘電体をみたした同心球殻コンデンサ】

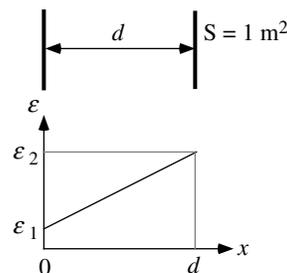
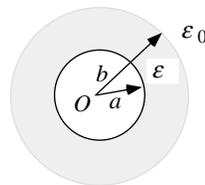
次のような誘電率分布を持つ誘電体を同心球殻 (内径 a , 外径 $b(\text{m})$) の間にみたしたコンデンサの容量を求めよ . $r(\text{m})$ は中心からの距離で , $k(\text{m})$ は定数である .

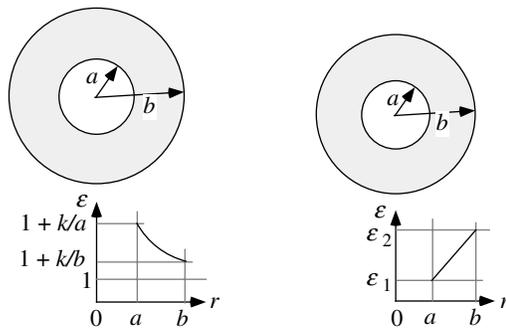
$$\varepsilon(r) = \frac{k+r}{r}$$

4. 【誘電体をみたした同心円筒コンデンサ】

次のような誘電率分布を持つ誘電体を同心円筒 (内径 a , 外径 $b(\text{m})$) の間にみたしたコンデンサの単位長さ当たりの容量を求めよ . $r(\text{m})$ は中心からの距離である .

$$\varepsilon(r) = \varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{b - a} (r - a)$$



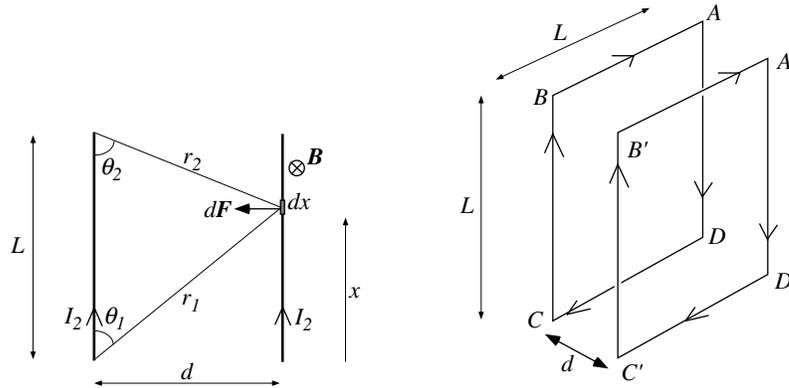


A.18 演習問題 9 (電磁力)

10, Dec., 1999

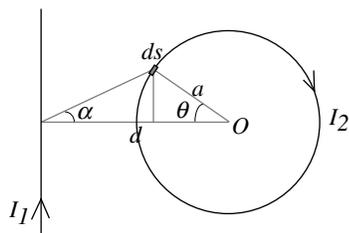
1. 【アンペールの力】

- (a) 【磁場中コイルに作用する偶力】
二辺の長さが $a, b(\text{m})$ の長方形コイルを一様な磁束密度 $B(\text{Wb/m}^2)$ に垂直に置き, 電流 $I(\text{A})$ を流すときに作用する偶力を求めよ.
- (b) 【二本の平行導線間の力】
長さ $L(\text{m})$ の二本の平行導線 (距離 $d(\text{m})$) に電流 $I_1, I_2(\text{A})$ を流すときに作用する力を求めよ.
- (c) 【二つの正方形回路間の力】
一辺の長さが $L(\text{m})$ の正方形コイルを向かい合わせて (距離 $d(\text{m})$), 電流 $I(\text{A})$ を同じ向きに流すときに作用する力を求めよ.



- (d) 【無限長直線導線と円形回路間の力】
無限長の導線に $I_1(\text{A})$, 中心がその導線から $d(\text{m})$ 離れた半径 $a(\text{m})$ の円形コイルに $I_2(\text{A})$ を流すときに作用する力を求めよ. 次の積分公式を参考にせよ.

$$\int_0^\pi \frac{\cos x}{b \cos x + c} dx = \frac{\pi}{b} - \frac{c}{b} \frac{\pi}{\sqrt{c^2 - b^2}} \quad (c > b)$$



2. 【ローレンツの力】

(a) 【サイクロトロン運動】

一様な静磁場 $B(\text{Wb/m}^2)$ の中に質量 $m(\text{kg})$, 電荷量 $q(\text{C})$ の荷電粒子が速度 $v(\text{m/s})$ で入ったとき ,

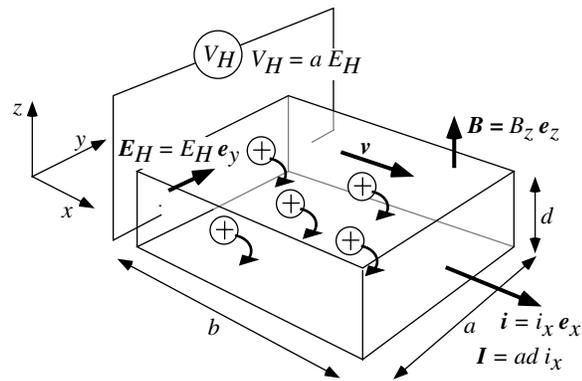
i. 円運動をすることを示せ

ii. その半径が $r = mv/(eB)$ (m) となることを示せ

iii. 円運動の角周波数が $\omega = eB/m$ (rad/s) となることを示せ

(b) 【ホール効果】

電流 $I(\text{A})$ の流れている導体または半導体を磁場 $B(\text{Wb/m}^2)$ の中に入れると , I と B に垂直な方向に起電力 $V_H(\text{V})$ が生じる . この起電力を求めよ . なお , 試料の形状等は図の通りとし , 電流の担い手は正の電荷 (電荷量 $q(\text{C})$, 密度 $n(\text{m}^{-3})$) とする .



A.19 演習問題 10(時間的に変動する場)

17, Dec., 1999

1. 【磁場中で回転するコイル】

一様な磁場 B (Wb/m^2) 中に置かれた面積 S (m^2) のコイルが角速度 ω (rad/s) で回転したときに生じる起電力を求めよ .

2. 【無限長電流と長方形コイル】

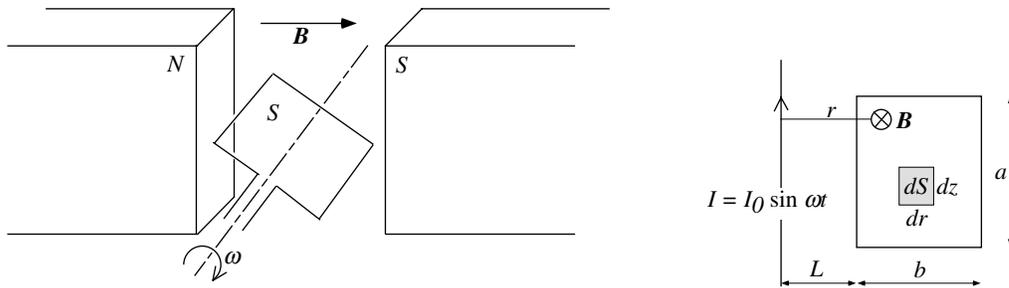
図のような無限長導線に $I = I_0 \sin \omega t$ (A) なる電流を流したときに , その横の長方形コイルに起電力を求めよ .

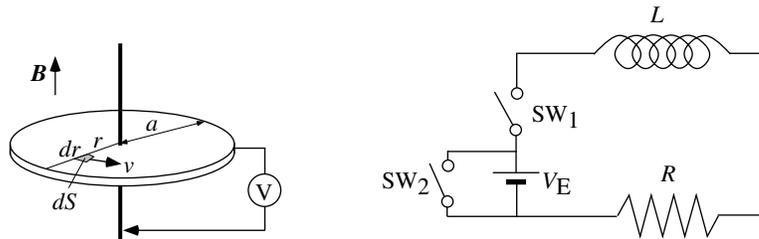
3. 【磁場中で回転する円盤】

磁束密度 B (Wb/m^2) の中で , 半径 a (m) の導体円盤が角速度 ω (rad/s) で回転するとき , 中心と円周との間に発生する起電力を求めよ .

4. 【LR 回路の過渡現象】

図のような LR 回路で初期状態 $I = 0$ (A) として , SW_1 を ON した後の電流波形を図示せよ . また , 十分時間がたった後に , SW_2 を ON して電池を短絡した後の電流波形を図示せよ .





A.20 演習問題 7 (静磁場その 2)

3, Dec., 1999

1. 【有限長直線電流によるベクトルポテンシャル】

有限長さの直線電流が中心軸より x (m) の距離に作るベクトルポテンシャル A (Wb) が次式で与えられることを示し, それを用いて磁束密度 B (Wb/m²) を求めよ. なお, 導線の両端と磁場を求めようとする点とのなす角を θ_1, θ_2 とする.

$$A = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \left(\frac{\sqrt{x^2 + L_1^2} + L_1}{\sqrt{x^2 + L_2^2} + L_2} \right)$$

2. 【二本の平行無限長平行電流によるベクトルポテンシャル】

間隔 $2d$ (m) の無限長平行導線に電流 I (A) を逆向きに流すときに生ずるベクトルポテンシャル A (Wb) が次式で与えられることを示し, それを用いて磁束密度 B (Wb/m²) を求めよ.

$$-\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r_1}{r_2}$$