

## 豆知識

## 電源のない LC 回路

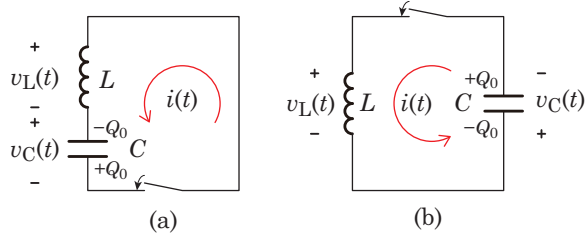


図 1 電源のない LC 回路.

## 初期条件

図 1 (a) の  $C$  の下側の電極に保持されていた正電荷が  $t > 0$  で放電して  $i(t)$  となる, と想定.\*1

$$i(0) = 0$$

$$v_C(0) = -V_0 \quad \therefore \quad v_L(0) = V_0$$

## 回路方程式\*2

$$v_L(t) + v_C(t) = 0$$

$$\begin{aligned} \therefore \left[ L \frac{di}{dt} \right] + \left[ \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau + v_C(0) \right] &= 0 \\ \therefore \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{LC} i &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

## 回路方程式の一般解

微分方程式 (1) の解の形を  $e^{st}$  と仮定すると, 特性方程式とその解は,

$$s^2 + \frac{1}{LC} = 0 \quad \therefore \quad s = \pm j \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

ここで,

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

とすると, 一般解は, 任意定数  $A_1, A_2$  を用いて,

$$i(t) = A_1 e^{j\omega_0 t} + A_2 e^{-j\omega_0 t}$$

ここで, Euler の公式より,

$$e^{j\omega_0 t} = \cos \omega_0 t + j \sin \omega_0 t$$

$$e^{-j\omega_0 t} = \cos \omega_0 t - j \sin \omega_0 t$$

であるから,

$$i(t) = B_1 \cos \omega_0 t + B_2 \sin \omega_0 t$$

$$B_1 = A_1 + A_2 \quad B_2 = A_1 - A_2$$

## 初期条件による係数決定

$$i(0) = 0 \quad \text{より,}$$

$$i(0) = B_1 = 0 \quad \therefore \quad i(t) = B_2 \sin \omega_0 t$$

$$v_L(0) = V_0 \quad \text{より,}$$

$$\begin{aligned} v(0) &= L \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} = \omega_0 L B_2 \cos \omega_0 t \Big|_{t=0} \\ &= \omega_0 L B_2 = V_0 \quad \therefore \quad B_2 = \frac{V_0}{\omega_0 L} \end{aligned}$$

よって, 回路に流れる電流  $i(t)$  は, 次式で表される角周波数  $\omega_0$  の正弦波となる.\*3

$$i(t) = \frac{V_0}{\omega_0 L} \sin \omega_0 t$$

 $L$  と  $C$  の電圧

$$v_L(t) = L \frac{di}{dt} = V_0 \cos \omega_0 t$$

$$v_C(t) = -v_L(t) = -V_0 \cos \omega_0 t$$

 $L$  と  $C$  の電力

$$p_L(t) = v_L(t) i(t) = \frac{V_0^2}{\omega_0 L} \sin \omega_0 t \cos \omega_0 t$$

$$= \frac{1}{2} \frac{V_0^2}{\omega_0 L} \sin 2\omega_0 t$$

$$p_C(t) = v_C(t) i(t) = -\frac{V_0^2}{\omega_0 L} \sin \omega_0 t \cos \omega_0 t$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{V_0^2}{\omega_0 L} \sin 2\omega_0 t$$

よって,  $L$  と  $C$  の電力は,

$$p_L(t) = -p_C(t)$$

$\Rightarrow L$  と  $C$  が等量のエネルギーを交換

\*1 その場合,  $v_C(0)$  が負となることに留意. 図 1 (b) のように描き直すと分かりやすいかも.

\*2 2025-05-30 まで公開していた資料では  $+v_C(0)$  を失念していました (ご指摘をくださった方に感謝致します).

\*3  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  より,  $i(t) = -\omega_0 C V_0 \sin \omega_0 t$  でもよい.

L のエネルギー

$$\begin{aligned}
 w_L(t) &= \int p_L(t) dt \\
 &= \frac{1}{2} \frac{V_0^2}{\omega_0 L} \int \sin 2\omega_0 t dt \\
 &= -\frac{1}{4} \frac{V_0^2}{\omega_0^2 L} \cos 2\omega_0 t + K_L
 \end{aligned}$$

$t=0$  で  $L$  の電流が  $i_L(0)=0$  であるから,  $t=0$  で  $L$  が持つ初期エネルギーは,

$$w_L(0) = \frac{1}{2} L i(0)^2 = 0 \quad \therefore K_L = \frac{1}{4} \frac{V_0^2}{\omega_0^2 L}$$

よって,

$$\begin{aligned}
 w_L(t) &= \frac{1}{4} \frac{V_0^2}{\omega_0^2 L} (1 - \cos 2\omega_0 t) \\
 &= \frac{1}{2} \frac{V_0^2}{\omega_0^2 L} \sin^2 \omega_0 t
 \end{aligned}$$

C のエネルギー

$$\begin{aligned}
 w_C(t) &= \int_0^t p_C(t) dt \\
 &= -\frac{1}{2} \frac{V_0^2}{\omega_0 L} \int \sin 2\omega_0 t dt \\
 &= \frac{1}{4} \frac{V_0^2}{\omega_0^2 L} \cos 2\omega_0 t + K_C
 \end{aligned}$$

$t=0$  で  $C$  の電圧が  $v_C(0)=-V_0$  であるから,  $t=0$  で  $C$  が持つ初期エネルギーは,

$$\begin{aligned}
 w_C(0) &= \frac{1}{2} C v_C(0)^2 = \frac{1}{2} C V_0^2 = \frac{1}{2} \frac{V_0^2}{\omega_0^2 L} \\
 \therefore \omega_0^2 &= \frac{1}{LC} \Rightarrow C = \frac{1}{\omega_0^2 L} \\
 \therefore K_C &= \frac{1}{4} \frac{V_0^2}{\omega_0^2 L}
 \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}
 w_C(t) &= \frac{1}{4} \frac{V_0^2}{\omega_0^2 L} (1 + \cos 2\omega_0 t) \\
 &= \frac{1}{2} \frac{V_0^2}{\omega_0^2 L} \cos^2 \omega_0 t
 \end{aligned}$$

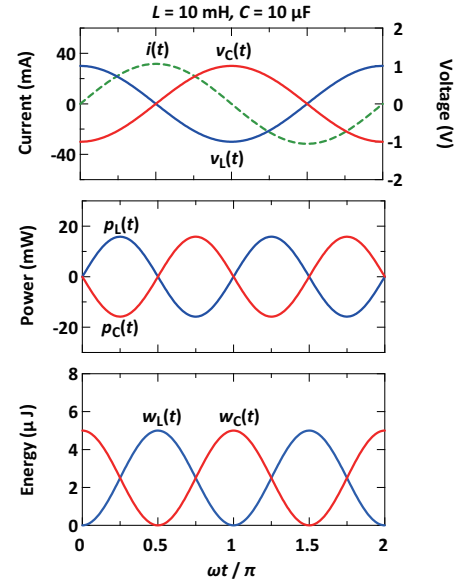


図2 電源のない LC 回路の電圧・電流・電力・エネルギーの波形。

回路全体が保持するエネルギー

$$\begin{aligned}
 w(t) &= w_L(t) + w_C(t) \\
 &= \frac{1}{2} \frac{V_0^2}{\omega_0^2 L} [\sin^2 \omega_0 t + \cos^2 \omega_0 t] \\
 &= \frac{1}{2} \frac{V_0^2}{\omega_0^2 L} \\
 &= \frac{1}{2} C V_0^2 \quad \therefore \omega_0^2 = \frac{1}{LC}
 \end{aligned}$$

⇒  $L$  と  $C$  の間でエネルギー交換が生じるが、  
回路全体としては, 初期エネルギーが  
永久に保持される。  
(エネルギー保存則)