第 12 章

二端子対網の伝送的性質：反復パラメータ，影像パラメータ，特性インピーダンス

本章では，複数の二端子対網を伝送路的に縦続接続したときの入力電圧・電流と最終段の出力電圧・電流の関係，並びに，電力反射の抑制に関して学習する．

12.1　伝送路と伝送量

二端子対網を伝送路的に扱うとは，一次側への入力に対して，二次側に出力が出る回路，として扱う，ということである．伝送路において重要なのは，入力に対して出力がどうなるか，という点であるから，**図 12.1** に示すような二端子対網を考えた場合，以下のパラメータが重要となる．

$$\frac{V_2}{V_1} \quad \text{及び} \quad \frac{I_2}{I_1} \tag{12.1}$$

但し，実際の伝送路では，V_2/V_1 や I_2/I_1 という「比」そのもののダイナミックレンジ (取り得る値の桁の範囲) が極めて広いため，「比」の対数を使い，それを**伝送量**と呼んでいる．

$$\theta_\mathrm{v} = \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right) = \ln\left|\frac{V_1}{V_2}\right| + \mathrm{j}\arg\left(\frac{V_1}{V_2}\right), \tag{12.2}$$

$$\theta_\mathrm{i} = \ln\left(\frac{I_1}{I_2}\right) = \ln\left|\frac{I_1}{I_2}\right| + \mathrm{j}\arg\left(\frac{I_1}{I_2}\right). \tag{12.3}$$

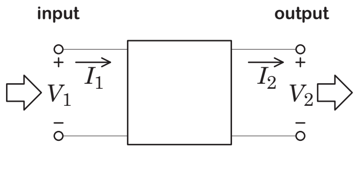

図 12.1 二端子対網を伝送路的に捉えた場合の入力と出力．

式 (12.1) と見比べると，分母と分子が入れ替わっていることに気づく．伝送路の場合，一般に，出力の大きさが入力よりも小さくなるため，出力/入力の大きさが 1 以下となり，その対数をとった値が負になる．これを正の値にするために分母と分子が逆転している．また，分母と分子にある電圧と電流はフェーザ形式 (複素数) で表したものである．従って，その対数をとった値にも実部と虚部があり，それぞれ，**減衰量** (単位：ネーパ)，**位相量** (単位：ラジアン，または，度) と呼ばれている．これらの量は，その名前が示す通り，以下のような意味を持つ．

- **減衰量**
  入力に対して出力がどれだけ減衰したか
- **位相量**
  入力に対して出力の位相がどれだけ変化したか

12.1.1　伝送量の使い方

ある二端子対網の伝送量が $\theta = \alpha + \mathrm{j}\beta$ であるとき，入力を $V_1 = |V_1|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi_1}$，出力を $V_2 = |V_2|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi_2}$ とすると，以下の関係が成り立つ．

$$V_2 = \mathrm{e}^{-\theta} V_1 \tag{12.4}$$

これは電流についても同様である．大きさと偏角について個別に見てみると，以下のようになる．

$$|V_2| = \mathrm{e}^{-\alpha}|V_1|, \tag{12.5}$$

$$\arg(V_2) = \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\phi_1 - \beta)}. \tag{12.6}$$

即ち，

- 実効値が $\mathrm{e}^{-\alpha}$ 倍される (減衰する)
- 位相が $-\beta$ だけ遅れる

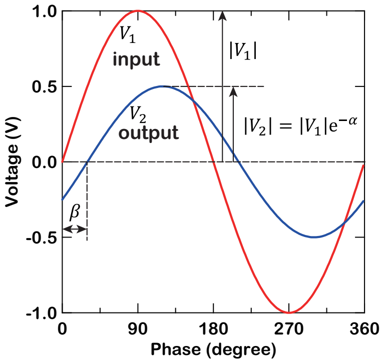

図 12.2 伝送量が $\alpha+j\beta$ の二端子対網の入力電圧波形と出力波形波形．

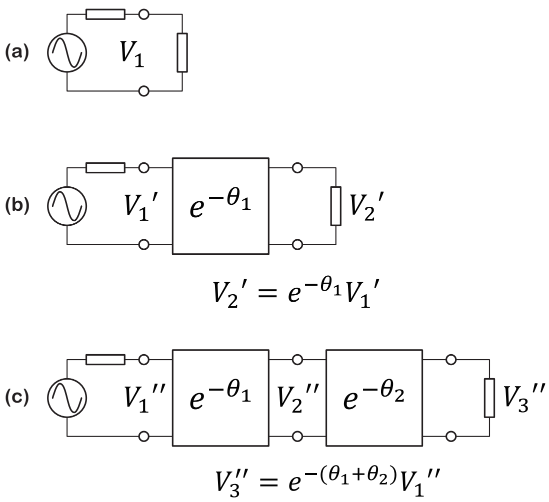

図 12.3 二端子対網の縦続接続時の伝送量．

従って，伝送量が $\alpha+j\beta$ の二端子対網の入力電圧波形と出力電圧波形の関係は，**図 12.2** のようになる．

12.2　伝送路の縦続接続と電力の反射

図 12.3 に示すように，信号の伝送を多段の二端子対網を用いて行う場合，原理的には，各二端子対網の伝送量を加算したものを用いれば，最終段の出力結果を計算することができる．

しかし，負荷に電力を供給するとき，電源側の内部インピーダンスと負荷側の内部インピーダンスが整合していない場合には，ほとんどの電力が負荷側で反射する場合もあり得る，ということを既に学んだ．

従って，何も考えずに二端子対網を多段縦続接続をすると，接続部分において電力の反射が起こるために効率よく信号が伝達できなくなり，最悪の場合は，信号情報を有する電力が全く最終段に到達しない，ということもあり得るのである．このような問題が発生しないような接続をするために考案されたのが，本章で学習する**反復パラメータ**である．

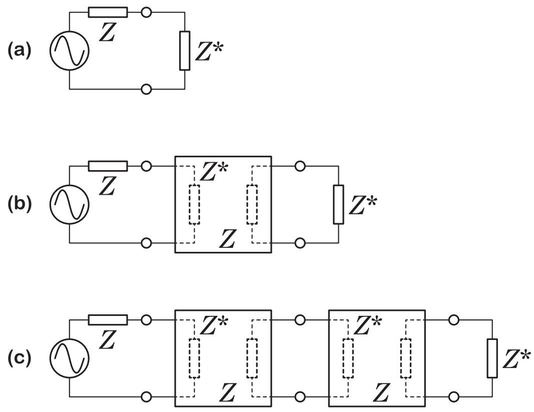

図 12.4 二端子対網の縦続接続時のインピーダンス整合．

12.3　インピーダンス整合

図 12.4 (a) に示すように電源と負荷が接続された回路では，インピーダンス整合が成り立つための条件は，電源の内部インピーダンスと負荷のインピーダンスが同図のように複素共役の関係にあることである．即ち，**図 12.4** (a) のように，電源の内部インピーダンスが Z であり，負荷のインピーダンスが Z^* であれば整合する．

次に，**図 12.4** (b) のように二端子対網が電源と負荷の間に挿入されたとしよう．ここで，この二端子対網は，入力インピーダンスが電源側の入力インピーダンスの複素共役となっており，出力インピーダンスは電源の入力インピーダンスと同じになっているものとする．このような条件が満たされれば，入力端子において電力の反射は生じない．また，出力端子側から二端子回路網を見込んだときも反射は生じない．従って，全体を通して電力の反射が生じないことになる．同様の理由により，**図 12.4** (c) のように，更に二端子対網が接続されても同様となる．この場合には，二端子対網どうしの接続部分での反射が懸念されるが，接続部から左側を見たインピーダンスと右側を見たインピーダンスがお互いに複素共役になっていることから，この接続部でも反射は起こら

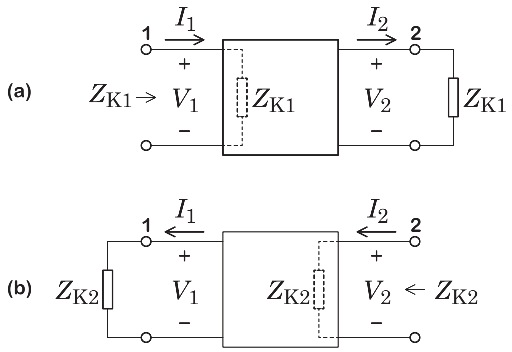

図 12.5 反復インピーダンスの定義のための図.

ない.

以下では，二端子対網がこのような素性を持つために必要な条件について述べる.

12.4 反復パラメータ

ここでは，二端子対網をどれだけ縦続接続しても，二端子対網の片方から見込んだインピーダンスが変わらない**反復インピーダンス**というものがあることを示す．なお，以下の三つのパラメータのセットを**反復パラメータ**という.

- 入力側 (一次側) から見た反復インピーダンス
- 出力側 (二次側) から見た反復インピーダンス
- 伝送量

12.4.1 反復インピーダンスの定義

図 12.5 (a) に示すように，二端子対網を間に入れても，負荷側を見たインピーダンスが変わらないようなインピーダンスを反復インピーダンスという．二端子対網の縦続パラメータとの間には，以下のような関係がある.

$$Z_{K1} = \frac{1}{2C}\left[(A-D) \pm \sqrt{(A-D)^2 + 4BC}\right] \qquad (12.7)$$

これに対し，**図 12.5** (b) に示すように，負荷側からみたインピーダンスが上記の定義と同様になる場合も，反復インピーダンスという．この場合の二端子対網の縦続パラメータと反復インピーダンスとの間の関係は，次式のようになる.

$$Z_{K2} = \frac{1}{2C}\left[(D-A) \pm \sqrt{(D-A)^2 + 4BC}\right] \qquad (12.8)$$

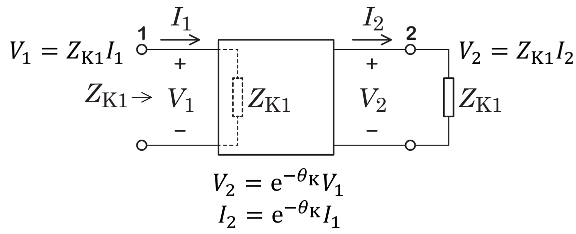

図 12.6 反復伝送量の定義のための図.

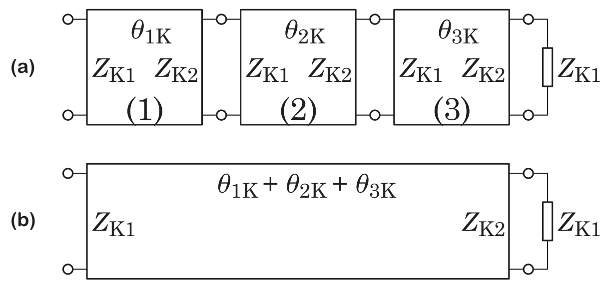

図 12.7 二端子対網の縦続接続時の反復パラメータ.

入力側から見たときとの違いは，D と A が入れ替わっている点である.

12.4.2 反復伝送量の定義

図 12.6 に示すように，反復インピーダンスが定義された二端子対網に対しても伝送量が定義され，それを**反復伝送量**という．二端子対網の縦続パラメータとの間には，以下のような関係がある.

$$e^{\theta_K} = \frac{A+D}{2} + \sqrt{\frac{(A+D)^2}{4} - 1}, \qquad (12.9)$$

$$\cosh\theta_K = \frac{A+D}{2}. \qquad (12.10)$$

12.4.3 反復パラメータの定義

上記で定義した Z_{K1}，Z_{K2}，θ_K を反復パラメータという．ある二端子対網 i の反復パラメータが Z_{K1}，Z_{K2}，θ_{iK} であるとき，これを多段縦続接続した場合の全体の反復パラメータは，入出力インピーダンスは変わらず，伝送量が「和」になるだけとなる．即ち，**図 12.7** に示すように，全体の反復パラメータが以下のようになる.

- 入力インピーダンス

$$Z_{K1} \qquad (12.11)$$

- 出力インピーダンス

$$Z_{\mathrm{K2}} \tag{12.12}$$

- 伝送量

$$\sum_i \theta_{i\mathrm{K}} \tag{12.13}$$

ここで，

$$Z_{\mathrm{K1}} = Z^*, \tag{12.14}$$
$$Z_{\mathrm{K2}} = Z \tag{12.15}$$

が満たされていれば，**図 12.4** に示したように，どれだけ二端子対網を縦続接続しても，電力が反射しない状況を作ることができるのである．

課題

反復インピーダンスと K 行列の要素の関係を導出せよ

略解

図 12.8 に示すような回路において，電圧と電流の関係は，以下のような関係になっている．

$$V_1 = AV_2 + BI_2, \tag{12.16}$$
$$V_2 = CV_2 + DI_2, \tag{12.17}$$
$$Z_{\mathrm{K1}} = \frac{V_2}{I_2}. \tag{12.18}$$

まず，入力インピーダンスが反復インピーダンスとなるために必要な条件を導出しよう．そのためには，A，B，C，D が

$$\frac{V_1}{I_1} = Z_{\mathrm{K1}} \tag{12.19}$$

を満たせばよい．

式 (12.16)，式 (12.17) より，次式が得られる．

$$\frac{V_1}{I_2} = A\frac{V_2}{I_2} + B, \tag{12.20}$$
$$\frac{I_1}{I_2} = C\frac{V_2}{I_2} + D. \tag{12.21}$$

これに，式 (12.18) の $Z_{\mathrm{K1}} = V_2/I_2$ を適用すると，

$$\frac{V_1}{I_2} = AZ_{\mathrm{K1}} + B, \tag{12.22}$$
$$\frac{I_1}{I_2} = CZ_{\mathrm{K1}} + D. \tag{12.23}$$

となる．上式から I_2 を消去すれば，A，B，C，D が満たすべき条件が得られ，次式のようになる．

$$\frac{V_1}{I_1} = \frac{AZ_{\mathrm{K1}} + B}{CZ_{\mathrm{K1}} + D} = Z_{\mathrm{K1}} \tag{12.24}$$

この式を Z_{K1} について解けば，次式が得られる．

$$Z_{\mathrm{K1}} = \frac{1}{2C}\left[(A-D) \pm \sqrt{(A-D)^2 + 4BC}\right] \tag{12.25}$$

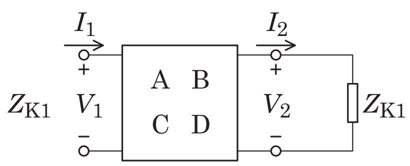

図 12.8 二端子対網の縦続行列 (K 行列) と反復インピーダンスの関係を導出するために用いる図．

相反定理を満足する回路の場合には，

$$AD - BC = 1 \tag{12.26}$$

より，

$$Z_{\mathrm{K1}} = \frac{1}{2C}\left[(A-D) \pm \sqrt{(A+D)^2 - 4}\right] \tag{12.27}$$

なお，複合 (±) は，実部が負にならない方を選ぶ．

次に，出力インピーダンスが反復パラメータとなる条件を導出しよう．入力側からみた場合に，

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} \tag{12.28}$$

である場合，出力側からみると，K 行列の章で確認したように，次式のようになる．

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & B \\ C & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix}. \tag{12.29}$$

従って，出力側からみた反復インピーダンスの条件は，入力側からみた場合に得られた条件式の A と D を入れ替えたものになる．即ち，以下の通りである．

$$Z_{\mathrm{K1}} = \frac{1}{2C}\left[(D-A) \pm \sqrt{(D-A)^2 + 4BC}\right]. \tag{12.30}$$

この場合も，相反定理を満足する回路の場合には，

$$AD - BC = 1 \tag{12.31}$$

より，

$$Z_{\mathrm{K1}} = \frac{1}{2C}\left[(D-A) \pm \sqrt{(D+A)^2 - 4}\right] \tag{12.32}$$

となる．

課題

縦続行列パラメータと反復伝送量の関係を導出せよ

略解

縦続行列 (K 行列) パラメータの基本式より，

$$V_1 = AV_2 + BI_2, \tag{12.33}$$
$$I_1 = CV_2 + DI_2. \tag{12.34}$$

である．伝送量 θ_K は，

$$I_2 \mathrm{e}^{-\theta_{\mathrm{K}}} I_1, \tag{12.35}$$
$$V_2 \mathrm{e}^{-\theta_{\mathrm{K}}} V_1 \tag{12.36}$$

で定義される．また，相反定理が成り立つ回路であれば，

$$AD - BC = 1 \tag{12.37}$$

が成り立つ．以上の式を組み合わせることにより，導出される．

式 (12.34) と式 (12.35) から I_1 を消去すると，

$$I_2 = \frac{C}{e^{\theta_K} - D} V_2 \tag{12.38}$$

となる．これを式 (12.33) に代入すると，

$$V_1 = AV_2 + \frac{BC}{e^{\theta_K} - D} V_2 \tag{12.39}$$

となる．これに，相反定理の式 (12.37) を適用すれば，

$$V_1 = AV_2 + \frac{AD-1}{e^{\theta_K} - D} V_2 \tag{12.40}$$

となる．この V_1 を式 (12.36) に代入すれば，

$$e^{\theta_K} = \frac{V_1}{V_2} = A + \frac{AD-1}{e^{\theta_K} - D} \tag{12.41}$$

となる．これを式変形すると，

$$\frac{e^{\theta_K} + e^{-\theta_K}}{2} = \frac{A+D}{2}, \tag{12.42}$$

$$\cosh\theta_K = \frac{A+D}{2} \tag{12.43}$$

となり，導出された．

また，式 (12.42) において，

$$x = e^{\theta_K} \tag{12.44}$$

とおけば，

$$x^2 - (A+D)x + 1 = 0 \tag{12.45}$$

なる二次方程式となるので，これを解けば，

$$x = e^{\theta_K} = \frac{A+D}{2} + \sqrt{\left(\frac{A+D}{2}\right)^2 - 1} \tag{12.46}$$

となる．

豆知識

豆知識

実用単位系の伝送量の単位：デシベル (dB)

本章で紹介した伝送量のように物理量の対数をとるとき，数学的に対数をとる場合には，底が e の自然対数の方が都合がよいが，実用的には 10 を底にした方が比率の桁がわかりやすい．そのため，実用単位系では，次式のように，10 を底にした対数がとられる．

$$\log_{10}\frac{B}{A} \tag{12.47}$$

このようにして計算した量の実用単位として「ベル (B)」という単位が用いられている．また，よく使う比率が扱い易い数値になるように，これを更に 10 倍したものが利用されている．

$$10\log_{10}\frac{B}{A} \tag{12.48}$$

この量の単位として「デシベル (dB)」が用いられている．

電気系の入出力の比率をこうした対数表示する場合には，電力と電圧・電流で取り扱いが異なっており，以下のようになっている．

- 電力の場合

$$10\log_{10}\frac{P_2}{P_1} \tag{12.49}$$

- 電圧・電流の場合

$$10\log\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2 = 20\log_{10}\frac{V_2}{V_1}, \tag{12.50}$$

$$10\log\left(\frac{I_2}{I_1}\right)^2 = 20\log_{10}\frac{I_2}{I_1}. \tag{12.51}$$

即ち，電力の場合は，$10\log_{10}$ をとり，電圧・電流の場合には，$20\log_{10}$ をとる．これは，以下のように，電力が電圧や電流の二乗に比例しているためである．

$$P = RI^2 = \frac{V^2}{R} \tag{12.52}$$

豆知識

デシベル (dB) とネーパー (Np)

入出力の比率の対数をとるときに，底が 10 なのか，e なのか，によって，以下のように，異なる単位を用い，どちらの底で対数をとったものなのかを明示している．

- 底が 10 ⇒ 単位は「デシベル (dB)」

$$20\log_{10}\frac{V_2}{V_1}$$

$$20\log_{10}\frac{I_2}{I_1}$$

$$10\log_{10}\frac{P_2}{P_1} \tag{12.53}$$

- 底が e ⇒ 単位は「ネーパー (Np)」

$$\ln\frac{V_2}{V_1} \tag{12.54}$$

$$\ln\frac{I_2}{I_1} \tag{12.55}$$

$$\frac{1}{2}\ln\frac{P_2}{P_1} \tag{12.56}$$

豆知識

Weber-Fechner の法則

デシベルの話が出てくるときによく引き合いに出されるのが「人間の感覚は対数的である」という Weber-Fechner の法則である．これは，人間の感覚で「増えた」ということを実感できるのは，$1,2,3,\cdots$ とリニアに増えるよりも，$1,2,4,8,\cdots$ もしくは $1,10,100,1000,\cdots$ という風に倍々もしくは桁で増えるときである，という法則である．これを言いだした人が，Ernst Heinrich Weber (1975-1878)*1 と Gustav Theodor Fechner (1801-1887)*2 であったので，Weber-Fechner の法則と呼ばれている．

従って，人間の感覚に対応するような物理量は dB などの単位で表されることが多い．身近な物理量で，dB が単位になっている例としては音量や光量などが挙げられる．なお，照明関係の光量については，リニアスケールの単位が用いられている場合が多いが，光ファイバによる光の伝送の際の光強度の減衰量については，dB が用いられている．

豆知識

なぜ自然対数は ln なの？

もしかするといるかもしれない，というよりも，過去

*1 A German physician who is considered as a founder of experimental psychology.

*2 A German experimental psychologyst.

に実際にいた「ln って何？」という大学性のために少し述べる．答えは自然対数関数であるのはすぐにわかる．

しかし，自然対数を英語にすれば，natural logarithm であるから，それを省略すれば，「nl」のはずである．なぜ反対になっているのであろうか？これは，ラテン語がもとになっているからである．ラテン語では，形容する単語が後ろに来るので，自然対数をラテン語で表すと，logarithmus naturalis となる．これが「ln」となっている所以である．

豆知識

双曲線関数

この章では，双曲線関数が出てくるので公式を確認しておこう．

$$\sinh\theta = \frac{\mathrm{e}^{\theta} - \mathrm{e}^{-\theta}}{2}, \tag{12.57}$$

$$\cosh\theta = \frac{\mathrm{e}^{\theta} + \mathrm{e}^{-\theta}}{2}. \tag{12.58}$$

なお，参考までに三角関数については，以下の関係がある．

$$\sin\theta = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}}{\mathrm{j}2}, \tag{12.59}$$

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}}{2}. \tag{12.60}$$

豆知識

動作減衰量

電気回路では，$10\log_{10}$ をとった量で定義されている**動作減衰量**なるパラメータがある．これは，回路に負荷を接続したときに，もともとの電源が供給可能な最大電力 (固有電力) に対して，どれくらいの比率の電力が出力側に伝達されているか，を表す量である．式で書くと，次式のようになる．

$$10\log_{10}\left(\frac{P_{\max}}{P}\right) \quad (\mathrm{dB}) \tag{12.61}$$

ここで，$P_{\max}$ は電源の固有電力，P はある負荷を想定したときに，実際に負荷に伝達 (供給) される電力である．

豆知識

入力・出力・伝達インピーダンス

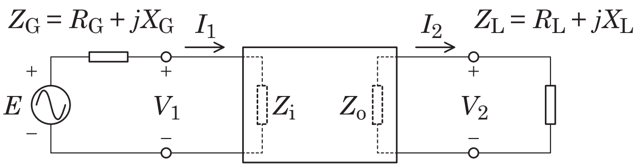

図 12.9 二端子対網の入力インピーダンス，出力インピーダンス，伝達インピーダンスの定義のための図．

ここでは，これまでに既に学んだ入力・出力インピーダンスに加えて，伝達インピーダンスなるものを定義する．なお，二次側の電流の向きの設定が，用いている教科書の向きとは逆であることに留意して欲しい．これは，K 行列を用いるからである．

図 12.9 に示したような二端子対網について，入力インピーダンス，出力インピーダンスは既に定義した通りである．これらとともに伝達インピーダンスを定義すると，以下のようになる．

- **入力インピーダンス**
  入力側から二端子対網をみたときのインピーダンス
$$Z_\mathrm{i} = \frac{V_1}{I_1} \tag{12.62}$$
- **出力インピーダンス**
  負荷側 (出力側) から二端子対網をみたときのインピーダンス
$$Z_\mathrm{o} = \frac{V_1}{I_1} \tag{12.63}$$
- **伝達インピーダンス**
  入力の電流に対する出力電圧の比
$$Z_\mathrm{T} = \frac{V_2}{I_1} \tag{12.64}$$

豆知識

影像パラメータ

ここでは，二端子対網の入力側，出力側にインピーダンスを接続したときに，二端子対網自身の入力インピーダンス，出力インピーダンスが接続されたインピーダンスと鏡のように同じになるようなインピーダンスを紹介する．これを**影像インピーダンス**という．かつて，フィルタを設計・構成するための手段であったが，現在は他の手段によってフィルタが設計されており，影像パラ

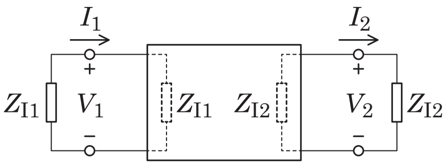

図 12.10 影像インピーダンスの定義のための図.

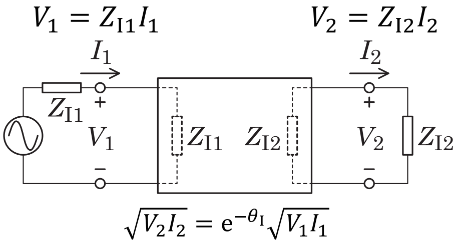

図 12.11 影像伝送量の定義のための図.

メータは不要となっていることから，いずれはシラバスから削除する予定である．なお，以下の三つのパラメータのセットを**影像パラメータ**という．

- 入力側 (一次側) から見た影像インピーダンス
- 出力側 (二次側) から見た影像インピーダンス
- 伝送量

図 12.10 に示すように，ある二端子対網について，入力端子の左右のインピーダンスが等しく，出力端子の左右のインピーダンスも等しくなるようなインピーダンスのペアを影像インピーダンスという．二端子対網の縦続パラメータとの間には，以下のような関係がある．

$$Z_{\mathrm{I}1} = \sqrt{\frac{AB}{CD}}, \tag{12.65}$$

$$Z_{\mathrm{I}2} = \sqrt{\frac{BD}{AC}}. \tag{12.66}$$

図 12.11 に示すように，影像インピーダンスが接続された二端子対網の伝送量を影像伝送量という．影像伝送量を θ_I とすると，以下のようになる．

$$\sqrt{V_2I_2} = \mathrm{e}^{-\theta_\mathrm{I}}\sqrt{V_1I_1}. \tag{12.67}$$

二端子対網の縦続パラメータとの間には，以下の関係がある．

$$\mathrm{e}^{\theta_\mathrm{I}} = \sqrt{AD} + \sqrt{BC}, \tag{12.68}$$

$$\coth\theta_\mathrm{I} = \sqrt{\frac{AD}{BC}}. \tag{12.69}$$

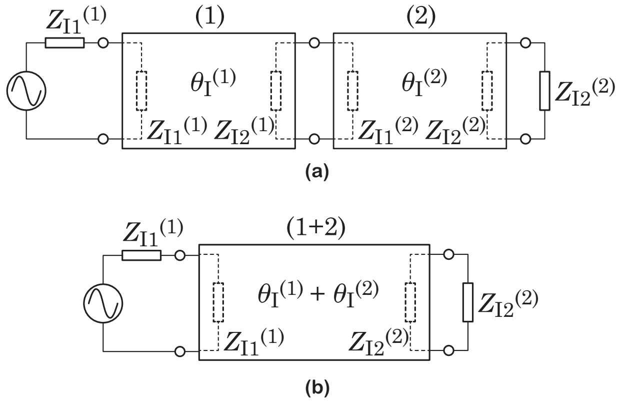

図 12.12 二端子対網の縦続接続時の影像パラメータ.

上記で定義した $Z_{\mathrm{I}1}, Z_{\mathrm{I}2}, \theta_\mathrm{I}$ を影像パラメータという．ある二つの二端子対網を縦続接続したとき，$Z_{\mathrm{I}2}^{(1)} = Z_{\mathrm{I}1}^{(2)}$ であれば，これらを縦続接続した場合の全体の反復パラメータは，伝送量が「和」になるだけとなる．即ち，**図 12.12** に示すように，全体の影像パラメータが以下のようになる．

$$Z_{\mathrm{I}1}^{(1)},\ Z_{\mathrm{I}2}^{(2)},\ \theta_\mathrm{I}^{(1)} + \theta_\mathrm{I}^{(2)}$$

課題

式 (12.65) と式 (12.66) を導出せよ

略解

縦続行列 (K 行列) の基本関係式：

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} \tag{12.70}$$

より，次式が得られる．

$$\begin{aligned} Z_{\mathrm{I}1} &= \frac{V_1}{I_1} \\ &= \frac{AV_2 + BI_2}{CV_2 + DI_2} \\ &= \frac{A(V_2/I_2) + B}{C(V_2/I_2) + D} \\ &= \frac{AZ_{\mathrm{I}2} + B}{CZ_{\mathrm{I}2} + D}. \end{aligned} \tag{12.71}$$

入出力を入れ替えると，

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & B \\ C & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} \tag{12.72}$$

となるから，

$$Z_{\mathrm{I2}} = \frac{DZ_{\mathrm{I1}} + B}{CZ_{\mathrm{I1}} + A}. \tag{12.73}$$

となる．これらより，以下の二つの式を得る．

$$CZ_{\mathrm{I1}}Z_{\mathrm{I2}} + DZ_{\mathrm{I1}} - AZ_{\mathrm{I2}} - B = 0, \tag{12.74}$$
$$CZ_{\mathrm{I1}}Z_{\mathrm{I2}} - DZ_{\mathrm{I1}} + AZ_{\mathrm{I2}} - B = 0. \tag{12.75}$$
$$\tag{12.76}$$

これらの式の和と差より，次の関係式を得る．

$$Z_{\mathrm{I1}}Z_{\mathrm{I2}} = \frac{B}{C}, \tag{12.77}$$
$$\frac{Z_{\mathrm{I1}}}{Z_{\mathrm{I2}}} = \frac{A}{D}. \tag{12.78}$$

よって，以下のように影像インピーダンスを A，B，C，D により表すことができる．

$$Z_{\mathrm{I1}} = \sqrt{\frac{AB}{CD}}, \tag{12.79}$$
$$Z_{\mathrm{I2}} = \sqrt{\frac{DB}{CA}}. \tag{12.80}$$

一方，伝達量のうち，電圧の伝達量については，

$$\begin{aligned}\frac{V_1}{V_2} &= A + \frac{BI_2}{V_2}\\ &= A + \frac{B}{Z_{\mathrm{I2}}}\\ &= A + \frac{B}{\sqrt{\frac{DB}{CA}}}\\ &= \sqrt{\frac{A}{D}}\left(\sqrt{AD} + \sqrt{BD}\right)\end{aligned} \tag{12.81}$$

となり，電流の伝達量については，

$$\begin{aligned}\frac{I_1}{I_2} &= \frac{CV_2}{I_2} + D\\ &= CZ_{\mathrm{I2}} + D\\ &= C\sqrt{\frac{DB}{CA}} + D\\ &= \sqrt{\frac{D}{A}}\left(\sqrt{AD} + \sqrt{BD}\right)\end{aligned} \tag{12.82}$$

となる．ここで，

$$\sqrt{V_2I_2} = \mathrm{e}^{\theta_{\mathrm{I}}}\sqrt{V_1I_1} \tag{12.83}$$

より，

$$\mathrm{e}^{\theta_{\mathrm{I}}} = \sqrt{\frac{V_2I_2}{V_1I_1}} \tag{12.84}$$

である．これに，先ほどの V_1/V_2 と I_1/I_2 を代入すれば，

$$\mathrm{e}^{\theta_{\mathrm{I}}} = \sqrt{AD} + \sqrt{BD} \tag{12.85}$$

が得られる．