

第 9 章

回路の方程式：回路のグラフ，キルヒホフの法則，行列表現

本章では，いくつかの回路素子で構成された複雑な電気回路の任意の閉路に流れる電流や，任意の節点の電圧を求めるための以下の二つの理論を紹介する．

- 閉路電流法
- 節点電位法

この方法の中で，以下に示す電気回路の二大法則を使う．

- キルヒホッフの電流の法則 (第 1 法則)
- キルヒホッフの電圧の法則 (第 2 法則)

9.1 回路のグラフ

電気回路は，回路素子の存在を無視すると，図 9.1 に示すように，節点 (node) と枝 (branch) によって構成されている．そこには，状況にもよるが，普通は，閉路 (loop) 構造が形成される．このような概念的な構造体をグラフ (graph) という．これから説明する電気回路の閉路電流法や節点電位法は，このグラフの理論に基づいているが，グラフ理論そのものは，電気回路学というよりは，純粋数学であるので，詳細は割愛する．

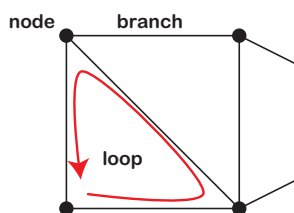


図 9.1 回路のグラフ (graph) と，節点 (node)，枝 (branch)，閉路 (loop)．

9.2 キルヒホッフの法則

キルヒホッフの法則とは，以下の二つの法則である．

- 電流の法則 (第 1 法則)
節点に流入する電流の和はそこから流出する電流の和と等しい．
- 電圧の法則 (第 2 法則)
閉路上の起電力の和は電圧降下の和と等しい．

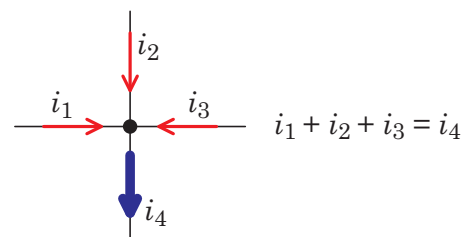


図 9.2 キルヒホッフの電流の法則 (第 1 法則). Kirchhoff's current law (KCL).

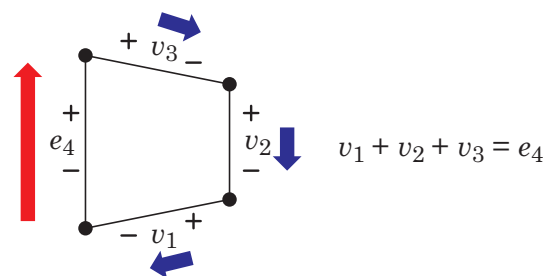


図 9.3 キルヒホッフの電圧の法則 (第 2 法則). Kirchhoff's voltage law (KVL).

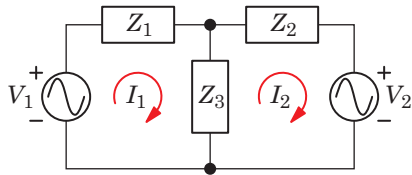


図 9.4 閉路電流法の例題回路.

これから述べる二種類の回路方程式の立て方は、全て、上記の二つの法則に基づいている。

9.3 閉路電流法

閉路電流法とは、以下のような理屈と手順により、複雑な回路の中の各閉路の電流を求める方法である。

- 各閉路の電流が求めるべき未知数となる
- 各閉路で KVL の式を作る
- 閉路の数だけ連立 KVL 方程式ができる
- 方程式の数と未知数の数が同じであるから、この連立方程式を解けば、未知数であった各閉路の電流が求められる

以下では、図 9.4 に示すような具体的な回路への閉路電流法の適用例を示す。

9.3.1 閉路電流を割り振る

まず、閉路を同図のように決め、各閉路に閉路電流を割り振る（閉路電流の添え字が閉路の番号としている）。ここでは、閉路 1 に I_1 が流れ、閉路 2 に I_2 が流れる、としている。なお、閉路を流れる電流の正の向きを図中の矢印のようにあらかじめ決めておく必要がある。このように矢印を描いた場合、この閉路内の電位の高低については、矢印の根元の方が高電位で、矢印の先の方が低電位としていることになる。

次に、閉路内に電圧源（起電力）がある場合には、その起電力を表す変数 V が正 ($V > 0$) のときに電源端子のどちらが高電位なのかを決めておく必要がある（場合によっては、あらかじめ指定されているかもしれない）。図中では、+ と - の印にて、下よりも上が高電位るときに正である、としている*1。

*1 「電圧降下」と「起電力」とでは、その電圧を表す変数が正 > 0 のときに、そこを流れる電流が正 > 0 となる向きが異なる、と

9.3.2 各閉路で KVL

KVL は「閉路なら電圧は上がった分だけ下がる」という理屈であるから、各閉路内に存在する起電力の部分と、電圧降下の部分について、それぞれの和を取る。

閉路 1

- 起電力（電圧上昇）の和
『 V_1 』
- 電圧降下の和
『 $Z_1 I_1 + Z_3 (I_1 - I_2)$ 』
☞ Z_3 における電圧降下は、注目している閉路 1 の電流 I_1 だけではなく、隣り合う閉路 2 の電流も関与していることに留意すべし。その際、閉路 2 と閉路 1 の電流の向きにも注意すべし。

閉路 2

- 起電力（電圧上昇）の和
『 $-V_2$ 』
☞ 閉路電流の向きと「起電力」の向きに注意すべし（脚注参照）。
- 電圧降下の和
『 $Z_2 I_2 + Z_3 (I_2 - I_1)$ 』
☞ 閉路 2 と閉路 1 の電流の向きにも注意すべし。

ここで、「上昇分＝降下分」という KVL 方程式を立てれば、各閉路について以下の式が得られる。

$$\begin{aligned} V_1 &= Z_1 I_1 + Z_3 (I_1 - I_2), \\ -V_2 &= Z_3 (I_2 - I_1) + Z_2 I_2. \end{aligned} \quad (9.1)$$

得られた式の右辺を各閉路電流についてまとめる。

$$\begin{aligned} V_1 &= (Z_1 + Z_3) I_1 + (-Z_3) I_2, \\ -V_2 &= (-Z_3) I_1 + (Z_2 + Z_3) I_2. \end{aligned} \quad (9.2)$$

この方程式を行列とベクトルの式にする。

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ -V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 + Z_3 & -Z_3 \\ -Z_3 & Z_2 + Z_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}. \quad (9.3)$$

この式から $[I_1, I_2]$ を算出することで各閉路の電流を求めることが出来る。上式から、

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}. \quad (9.4)$$

いうことに留意のこと。

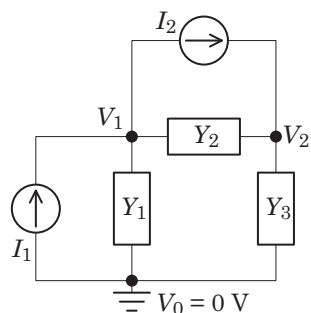


図 9.5 節点電位法の例題回路.

の形に変形する方法は線形代数の本に詳しく書かれているので、そちらを参考にして欲しい。

9.4 節点電位法

節点電位法とは、以下のような理屈と手順により、複雑な回路の中の各節点の電位を求める方法である。

- 各節点の電位が求めるべき未知数となる
- 各節点で **KCL** の式を作る
- 節点の数だけ連立 **KCL** 方程式ができる
- 方程式の数と未知数の数が同じであるから、この連立方程式を解けば、未知数であった各節点の電位が求められる

以下では、図 9.4 に示す具体的な回路への閉路電流法の適用例を示す。

9.4.1 節点電位を割り振る

まず、どれか一つの節点を接地電位 (0 V) とする。次に、残りの各節点に節点電位を割り振る*2。

9.4.2 各節点で KCL, の前に

KCL は「入った分だけ出て行く (節点に溜まらない)」という理屈であるから、各節点で電流が流入している分の和と、流出している分の和が等しい、という等式を作る。

ここで、電流が流入している分とは、電流源がその節点につながっている場合である。その電流源の電流の向きがその節点に対して流出になっている場合には、符号

$$\begin{aligned}
 & I_{ab} = YV_{ab} \\
 & = V_a - V_b \quad \text{or} \\
 & I_{ab} = \frac{V_{ab}}{Z}
 \end{aligned}$$

図 9.6 節点 a からアドミタンス Y を通って b に流出する電流と各節点の電位の関係。

が反対の電流が流入している、とする。即ち、流入分を表す式の中では、その電流変数の前にマイナス符号をつける。従って、「電流が流入している分」という表現は厳密には正しくなく、「その節点の電位とは関係無く、電流の出し入れが強制的に行われている成分」というのが正しい表現である (かなりくどい言い方だが)。

一方、電流が流出している分とは、注目している節点から隣の節点へ、その二点間の電圧降下によって、アドミタンス (あるいはインピーダンス) を通って流れ出る電流である。例えば、図 9.6 に示すように、注目している接点を a (その電位を V_a)、流出先の節点を b (その電位を V_b) とし、a から b に流れ出る電流を I_{ab} とする。このとき、端子 a から端子 b への電圧降下 V_{ab} は $V_a - V_b$ となる。節点 ab の間にあるアドミタンスが Y (インピーダンスを $Z = 1/Y$) であれば、オームの法則により、節点 a から流れ出る電流は、

$$I_{ab} = YV_{ab} = Y(V_a - V_b), \quad (9.5)$$

または、

$$I_{ab} = \frac{V_{ab}}{Z} = \frac{V_a - V_b}{Z} \quad (9.6)$$

となる。

9.4.3 各節点で KCL

以下では、図 9.5 に示した回路の各節点に対して、上記のような手順に従い、電流流入と電流流出の成分の書き下し作業を具体的にを行う。なお、節点電位法で、ある節点周りの電流の流入と流出を考えるとときは、図 9.7 (a)、図 9.8 (a) に示すように、「注目する節点の隣まで」だけを考えればよい。極端に言えば、図 9.7 (b)、図 9.8 (b) のように考えればよい、ということである。

節点 1 (図 9.7 を参照)

- 電流流入の和 = ① + ②

*2 節点電位の添え字を節点番号としている。

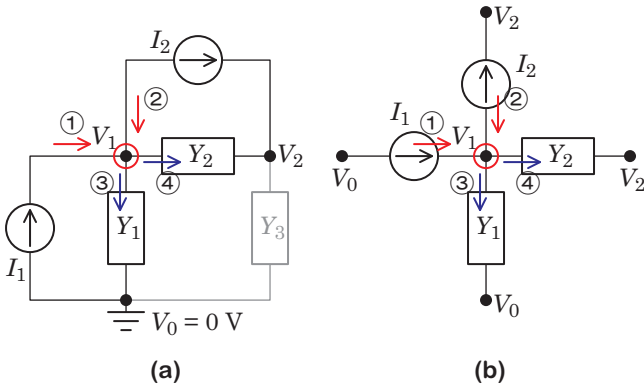


図 9.7 節点電位法例題回路 (図 9.5) の節点 1 の周りだけを考えているときの頭の中の描像.

ここで、「流入分=流出分」という KCL 方程式を立てれば、各閉路について以下の式が得られる.

$$\begin{aligned} I_1 - I_2 &= Y_1 V_1 + Y_2 (V_1 - V_2), \\ I_2 &= Y_2 (V_2 - V_1) + Y_3 V_2. \end{aligned} \quad (9.7)$$

得られた式の右边を各節点電位についてまとめる.

$$\begin{aligned} I_1 - I_2 &= (Y_1 + Y_2) V_1 + (-Y_2) V_2, \\ I_2 &= (-Y_2) V_1 + (Y_1 + Y_2) V_2. \end{aligned} \quad (9.8)$$

この方程式を行列とベクトルの式にする.

$$\begin{bmatrix} I_1 - I_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 + Y_2 & -Y_2 \\ -Y_2 & Y_1 + Y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}. \quad (9.9)$$

この式から $[V_1, V_2]$ を算出することで各閉路の電流を求めることが出来る. 上式から,

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}. \quad (9.10)$$

の形に変形する方法は線形代数の本に詳しく書かれているので、そちらを参考にして欲しい.

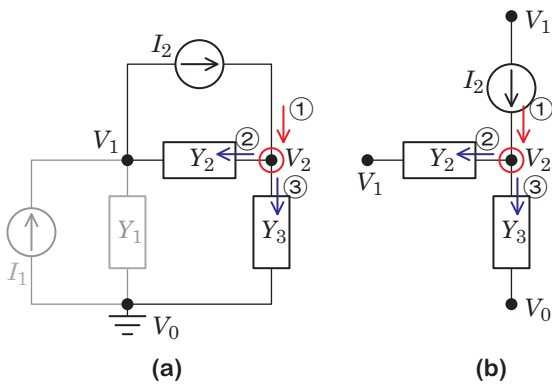


図 9.8 節点電位法例題回路 (図 9.5) の節点 2 の周りだけを考えているときの頭の中の描像.

『 $I_1 + (-I_2)$ 』

☞ I_2 は流入する向きとは逆の電流源なので、マイナス符号を付けている.

- 電流流出の和=③+④

『 $Y_1(V_1 - V_0) + Y_2(V_1 - V_2)$ 』

☞ ③の成分をわざわざ $Y_1(V_1 - V_0)$ と書いているが、 $V_0 = 0$ であるあから、慣れてきたらいきなり $Y_1 V_1$ と書いたらよい.

節点 2 (図 9.8 を参照)

- 電流流入の和=①

『 I_2 』

- 電流流出の和=②+③

『 $Y_2(V_2 - V_1) + Y_3(V_2 - V_0)$ 』

9.5 計算練習

課題

図 9.9 の各閉路を流れる電流をフェーザ形式で表したものを I_1, I_2 とする. 閉路電流法を用いて I_1, I_2 を求めよ. なお, 解答するときのフェーザ形式の表記法としては, 直交座標系でも, 極座標形でもどちらでもよい. 有効数字は 3 桁とする.

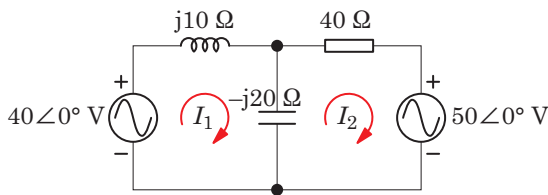


図 9.9 閉路電流法に関する問題の図

略解

閉路方程式は以下ようになる.

$$40\angle 0^\circ = j10I_1 + (-j20)(I_1 - I_2), \quad (9.11)$$

$$-50\angle 0^\circ = 40I_2 + (-j20)(I_2 - I_1). \quad (9.12)$$

I_1, I_2 についてまとめると, 以下ようになる.

$$40 = -j10I_1 + j20I_2, \quad (9.13)$$

$$-50 = j20I_1 + (40 - j20)I_2. \quad (9.14)$$

数値を簡単化すると, 以下ようになる.

$$4 = -jI_1 + j2I_2, \quad (9.15)$$

$$-5 = j2I_1 + (4 - j2)I_2. \quad (9.16)$$

これを行列形式で書けば, 以下ようになる.

$$\begin{bmatrix} 4 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -j & j2 \\ j2 & 4-j2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}. \quad (9.17)$$

従って, 求めるべき $[I_1, I_2]$ は, 次式で得られる.

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -j & j2 \\ j2 & 4-j2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \end{bmatrix}. \quad (9.18)$$

余因子を用いた計算をするために, 行列式と余因子を求

めておく.

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} -j & j2 \\ j2 & 4-j2 \end{vmatrix} = 2-j4 \\ &= 4.472\angle -63.43^\circ, \end{aligned} \quad (9.19)$$

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \begin{vmatrix} 4 & j2 \\ -5 & 4-j2 \end{vmatrix} = 16+j2 \\ &= 16.12\angle 7.125^\circ, \end{aligned} \quad (9.20)$$

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \begin{vmatrix} -j & 4 \\ j2 & -5 \end{vmatrix} = -j3 \\ &= 3\angle -90^\circ. \end{aligned} \quad (9.21)$$

以上より,

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{16.12\angle 7.125^\circ}{4.472\angle -63.43^\circ} \\ &= 3.605\angle 70.56^\circ, \end{aligned} \quad (9.22)$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{3\angle -90^\circ}{4.472\angle -63.43^\circ} \\ &= 0.6708\angle -26.57^\circ. \end{aligned} \quad (9.23)$$

従って, 求めるべき I_1, I_2 は,

$$I_1 = (3.61\angle 70.6^\circ) \text{ A}, \quad (9.24)$$

$$I_2 = (0.671\angle -26.6^\circ) \text{ A} \quad (9.25)$$

となる.

課題

図9.10の節点1と節点2の電位を V_1 , V_2 とする. 節点電位法を用いて V_1 , V_2 を求めよ. なお, 解答するときのフェーザ形式の表記法としては, 直交座標系でも, 極座標系でもどちらでもよい. 有効数字は3桁とする.

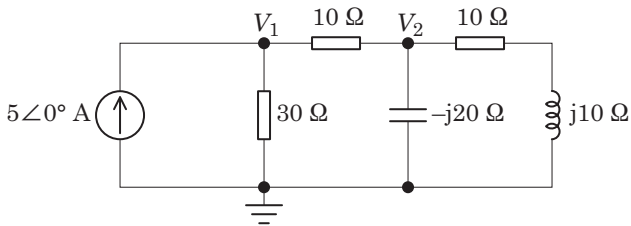


図 9.10 節点電位法に関する問題の図

略解

節点方程式をつくると以下ようになる.

$$5 = \frac{V_1 - 0}{30} + \frac{V_1 - V_2}{10}, \quad (9.26)$$

$$0 = \frac{V_2 - V_1}{10} + \frac{V_2 - 0}{-j20} + \frac{V_2 - 0}{10 + j10}. \quad (9.27)$$

これを整理すると, 以下ようになる.

$$150 = 4V_1 - 3V_2, \quad (9.28)$$

$$0 = -2V_1 + 3V_2. \quad (9.29)$$

これは, 行列計算などをしなくても簡単に解けて,

$$V_1 = 75.0 \text{ V}, \quad (9.30)$$

$$V_2 = 50.0 \text{ V} \quad (9.31)$$

となる.

豆知識

豆知識

交流なのに「流入」「流出」って？

交流電流の場合、「流入」と「流出」が常に時間とともに入れ替わっているのです、回路に矢印を描いてそのどちらかにするというところに違和感を覚える人がいるかもしれない。至極ごもっともである。電圧の「高電位側」と「低電位側」というのもおかしな話である。

交流回路で電流の流入・流出や電位の高低に言及しているときは、ある瞬間について言及しているのだと思って欲しい。ある時刻に限定して、電流の状況をみれば、「流入」、「流出」、「流入出無し」のどれかになっており、電圧についても、二つの節点間の電位差を見れば、どちらかが「高電位側」、どちらかが「低電位側」、もしくは「両方とも同電位」のどれかになっているからである。

豆知識

2×2の行列の逆問題

未知の閉路電流が二つの閉路方程式、もしくは未知の接点電位が二つの節点方程式の場合、解くべき方程式は、一般に以下のようなになる。

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \quad (9.32)$$

このとき、 $[x_1, x_2]$ は、次式で与えられる。

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad (9.33)$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}. \quad (9.34)$$

ここで、

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc, \quad (9.35)$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} y_1 & b \\ y_2 & d \end{vmatrix}, \quad (9.36)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a & y_1 \\ c & y_2 \end{vmatrix} \quad (9.37)$$

である。

豆知識

3×3の行列の逆問題

未知の閉路電流が三つの閉路方程式、未知の節点電位が三つの節点方程式の場合には、解くべき方程式は一般に以下のようなになる。

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}. \quad (9.38)$$

このとき、 $[x_1, x_2, x_3]$ は、次式で与えられる。

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad (9.39)$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad (9.40)$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}. \quad (9.41)$$

ここで、

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad (9.42)$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} y_1 & a_{12} & a_{13} \\ y_2 & a_{22} & a_{23} \\ y_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad (9.43)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & y_1 & a_{13} \\ a_{21} & y_2 & a_{23} \\ a_{31} & y_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad (9.44)$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & y_1 \\ a_{21} & a_{22} & y_2 \\ a_{31} & a_{32} & y_3 \end{vmatrix} \quad (9.45)$$

である。

以上のように、求めたい未知数を計算するためには、行列式を計算する必要がある。線形代数では、行列式を計算する方法として「たすき掛け方式」を学習すると思うが、たすき掛け方式は 4×4 以上の行列式には適用できないので、むしろ下記のような一般的な計算法を身につけておいた方がよいと思う。

豆知識

4×4以上の行列式と余因子展開

4×4 以上の行列式の計算の場合には、余因子展開を使って計算した方が得策であると思われる。なお、この余因子展開を使った計算法は任意の行数・列数に対して行えるので、 4×4 未満の行列式に対しても成り立つ。試験の時のように、手計算で行う場合、特に要素が複素数の場合には、 3×3 であっても余因子展開を使った方が、

たすき掛けを使うよりも計算間違いをする確率が低くなると思われる．強制はしないが， 3×3 であっても余因子展開を使うことを勧める（試験の時は）．

現代では，そんなことをしなくても，**MATLAB** 等を使えば，行列式の値を出してくれるので，実務段階で使うときには，手計算はまずしないであろう．しかし，学習する立場にある学生は，このような計算手法があることを知識として知っており，かつ，手計算でやれ，と言われれば出来るようになっておく必要がある．

余因子展開の説明の前に，まず「余因子」とは何か，を説明しておく．正方行列においてある要素 a_{ij} に注目し，その要素が含まれている行と列を取り去って作られる小行列式に $(-1)^{i+j}$ を乗じたものを (i, j) -余因子という．ここでは， $|M|_{ij}$ で表すことにする．

余因子展開とは，ある正方行列 M の行列式 $|M|$ が，この余因子を使って，次式で与えられるというものである．

$$|M| = a_{1j}|M|_{1j} + a_{2j}|M|_{2j} + \cdots + a_{nj}|M|_{nj} \quad (9.46)$$

もしくは，

$$|M| = a_{i1}|M|_{i1} + a_{i2}|M|_{i2} + \cdots + a_{in}|M|_{in} \quad (9.47)$$

ここで，前者は，ある j 列に関して，その列の要素と余因子の積の和を取ったもの，ということを表す式である．後者は，ある i 行に関して，その行の要素と余因子の積の和を取ったもの，ということを表している． $n \times n$ の場合を表すための一般式を見ても「ピン」と来ないかもしれないので， 4×4 の具体例を図 9.11 に示しておく．

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= +a_{11}|M|_{11} - a_{21}|M|_{21} + a_{31}|M|_{31} - a_{41}|M|_{41}$$

符号

⊕	⊖	⊕	⊖
⊖	⊕	⊖	⊕
⊕	⊖	⊕	⊖
⊖	⊕	⊖	⊕

$|M|_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$

a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}
a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}

$|M|_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$

a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}
a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}

他の
 $|M|_{ij}$ も同様

図 9.11 余因子展開の説明図.

事前基盤知識確認事項

[1] キルヒホッフの電流の法則

キルヒホッフの電流の法則とは？

略解

「一つの節点に流入する電流の和は，そこから流出する電流の和と等しい」である．要するに，「入った分だけ出て行く」「そこに溜まらない」という理屈である．

[2] キルヒホッフの電圧の法則

キルヒホッフの電圧の法則とは？

略解

「一つの閉路上の起電力の和は，電圧降下の和と等しい」である．要するに，ループを構成していれば，そのループ上に電位の高低があっても，一周すればもとの電位と同じところに戻る，という理屈である．

[3] 方程式の解

連立方程式が解ける条件を述べよ．

略解

未知数と同じ個数の独立した方程式があること．

[4] 余因子展開

本章では，行列式の計算を多用する．クラメル公式でもよいが， 3×3 だけにしか通用しない．どのような行列でも対応できる余因子展開の学習をきちっとしているかどうかを確認する．以下の行列 M の行列式 $|M|$ を余因子展開法によって計算せよ．

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} |M| &= 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2 \left\{ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right\} \\ &\quad + 3 \left\{ - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right\} \\ &= 2\{1 + (-1)\} \\ &\quad + 3\{(-1) + 1\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

略解

事後学習内容確認事項

課題

A. 閉路電流法

図 9.12 の各閉路に流れる閉路電流をフェーザ形式で表したものを I_1, I_2, I_3 とする。閉路電流法を用いて I_1, I_2, I_3 の値を求めよ。なお、解答するときのフェーザ形式の表記法としては、直交座標系でも、極座標系でもどちらでもよい。有効数字は 3 桁とする。

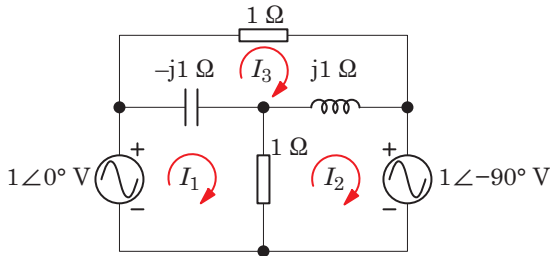


図 9.12 閉路電流法に関する問題の図

略解

各閉路電流の向きによる符号の違いを考慮して閉路電流方程式をたてると、以下のようになる。

$$\begin{aligned} 1\angle 0^\circ &= (1-j)I_1 + (-I_2) + (-j)(-I_3), \\ -1\angle -90^\circ &= (-I_1) + (1+j)I_2 + j(-I_3), \\ 0 &= (-j)(-I_1) + j(-I_2) + (1+j-j)I_3. \end{aligned}$$

書き直すと、次のようになる。

$$\begin{aligned} 1 &= (1-j)I_1 - I_2 + jI_3, \\ j &= -I_1 + (1+j)I_2 - jI_3, \\ 0 &= jI_1 - jI_2 + I_3. \end{aligned}$$

行列形式で書くと、次のようになる。

$$\begin{bmatrix} 1 \\ j \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-j & -1 & j \\ -1 & 1+j & -j \\ j & -j & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}.$$

次に、 I_1, I_2, I_3 を求めるために、行列式 $\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$

を計算しておく。

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 1-j & -1 & j \\ -1 & 1+j & -j \\ j & -j & 1 \end{vmatrix} = 1, \\ \Delta_1 &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & j \\ j & 1+j & -j \\ 0 & -j & 1 \end{vmatrix} = 2+j3, \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} 1-j & 1 & j \\ -1 & j & -j \\ j & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3+j2, \\ \Delta_3 &= \begin{vmatrix} 1-j & -1 & 1 \\ -1 & 1+j & j \\ j & -j & 0 \end{vmatrix} = 1+j. \end{aligned}$$

これより、求めるべき閉路電流は、以下の通りとなる。

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{\Delta_1}{\Delta} = (2.00 + j3.00) \text{ A}, \\ I_2 &= \frac{\Delta_2}{\Delta} = (3.00 + j2.00) \text{ A}, \\ I_3 &= \frac{\Delta_3}{\Delta} = (1.00 + j1.00) \text{ A}. \end{aligned}$$

課題

B. 接点電位法

図 9.13 の回路は、図 9.12 の回路と同じである。今度は、この回路の閉路電流を節点電圧法を用いた次の要領で求めよう。この場合も、解答するときのフェーザ形式の表記法としては、直交座標系でも極座標系でもどちらでもよい。有効数字は 3 桁とする。

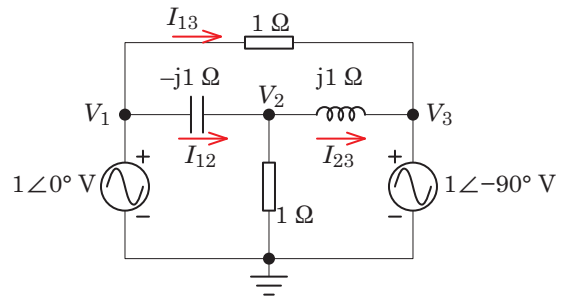


図 9.13 節点電圧法に関する問題の図

問 1

節点 1 から節点 2 に向かって流れる電流を I_{12} 、節点 2 から節点 3 に向かって流れる電流を I_{23} 、節点 1 から節

点3に向かって流れる電流を I_{13} とするとき、 I_{12} , I_{23} , I_{13} を I_1 , I_2 , I_3 を用いて表せ。

問2

上の問1で定義した I_{12} , I_{23} , I_{13} と V_1 , V_2 , V_3 との間に成り立つ関係式（オームの法則）を書け。

問3

V_1 , V_2 , V_3 を節点電圧法で求めよ。

問4

問1, 問2, 問3の結果から、 I_1 , I_2 , I_3 を求めよ。

略解

問1

節点間の電流は、各閉路で定義した閉路電流の向きを考慮した和であるから、以下のようになる。

$$I_{12} = I_1 - I_3, \quad (9.48)$$

$$I_{23} = I_2 - I_3, \quad (9.49)$$

$$I_{13} = I_3. \quad (9.50)$$

問2

(節点間の電位差)=(節点間のインピーダンス)×(節点間電流)というオームの法則が成り立つから、求める式は以下の通りである。

$$I_{12} = \frac{V_1 - V_2}{-j}, \quad (9.51)$$

$$I_{23} = \frac{V_2 - V_3}{j}, \quad (9.52)$$

$$I_{13} = \frac{V_1 - V_3}{1}. \quad (9.53)$$

問3

節点1と節点3については、接地電位となる接点との間に電圧の判っている電圧源がつながっているだけなので、次式がすぐに得られる。

$$V_1 = 1, \quad (9.54)$$

$$V_3 = -j. \quad (9.55)$$

節点2については、電流源がつながっていないので、全て流れ出ると仮定した電流の総和がゼロという以下のよ

うな方程式を立てることになる。

$$0 = \frac{V_2 - V_1}{-j} + \frac{V_2}{1} + \frac{V_2 - V_3}{j}. \quad (9.56)$$

これを書き直すと、以下のようになる。^{*3}

$$0 = -jV_1 + V_2 + jV_3. \quad (9.57)$$

$$(9.58)$$

式(9.54)と式(9.55)の関係を用いて、式(9.57)の V_1 , V_3 を消去すると、以下のようになる。

$$0 = -j1 + V_2 + j(-j), \\ = -j + V_2 + 1.$$

よって、 V_2 は、以下のようになる。

$$V_2 = j - 1.$$

まとめると、求めるべき節点電圧は以下の通りとなる。

$$V_1 = 1.00 \text{ V}, \\ V_2 = (-1.00 + j1.00) \text{ V}, \\ V_3 = -j1.00 \text{ V}.$$

問4

得られた各節点電圧を式(9.51), 式(9.52), 式(9.53)に代入すると、次式を得る。

$$I_{12} = \frac{V_1 - V_2}{-j} \\ = \frac{1 - (j - 1)}{-j} = \frac{2 - j}{-j} = 1 + j2, \\ I_{23} = \frac{V_2 - V_3}{j} \\ = \frac{(j - 1) - (-j)}{j} = \frac{j2 - 1}{j} = 2 + j, \\ I_{13} = \frac{V_1 - V_3}{1} \\ = \frac{1 - (-j)}{1} = 1 + j.$$

式(9.48), 式(9.49), 式(9.50)を用いると、次式を得る。

$$I_1 - I_3 = 1 + j2, \quad (9.59)$$

$$I_2 - I_3 = 2 + j, \quad (9.60)$$

$$I_3 = 1 + j. \quad (9.61)$$

^{*3} 左辺がゼロなので、右辺を定数倍した等価な式が無数に存在することに注意せよ。例えば、式変形の仕方が異なると、 $0 = V_1 + jV_2 - V_3$ という形にもなる。

式 (9.59) と式 (9.61) より,

$$\begin{aligned} I_1 &= 1 + j2 + I_3 = 1 + j2 + 1 + j \\ &= 2 + j3. \end{aligned}$$

式 (9.60) と式 (9.61) より,

$$\begin{aligned} I_2 &= 2 + j + I_3 = 2 + j + 1 + j \\ &= 3 + j2. \end{aligned}$$

まとめると,

$$\begin{aligned} I_1 &= (2.00 + j3.00) \text{ A}, \\ I_2 &= (3.00 + j2.00) \text{ A}, \\ I_3 &= (1.00 + j1.00) \text{ A} \end{aligned}$$

となり, 確かに前問で閉路電流法を用いて求めた I_1, I_2, I_3 と同じになっていることが確認できる.