第 6 章

交流電力

本章では，正弦波交流の場合に特有の電力を表すパラメータについて学ぶ．

- **複素電力** S
  フェーザ形式の電圧 $\boldsymbol{E}$ とフェーザ形式の電流 $\boldsymbol{I}$ の共役複素数 $\boldsymbol{I}^*$ の積:
  $$S = \boldsymbol{E}\boldsymbol{I}^*.$$
  本章では，電圧として電源のみを扱っているので電圧を $\boldsymbol{E}$ で表しているが，より一般的な電圧の記号 $\boldsymbol{V}$ で表すならば，$S = \boldsymbol{V}\boldsymbol{I}^*$ となる．
- **皮相電力** $|S|$
  上記複素電力の絶対値（大きさ）．フェーザ形式の電圧と電流の大きさだけをかけ算したもの．
- **有効電力** P
  複素電力の実部．実際に消費される電力は，皮相電力ではなく，この有効電力となる．
- **無効電力** Q
  複素電力の虚部．実際には消費されない成分．[*1]
- **力率** $\cos\theta$
  複素電力の実部と虚部がなす偏角の cos．皮相電力に力率をかけることによって有効電力となる．力率の値は 100 倍して % で表すことが多い．
- 複素平面上におけるこれらのパラメータの関係については，後述の**図 6.4** を参照のこと．

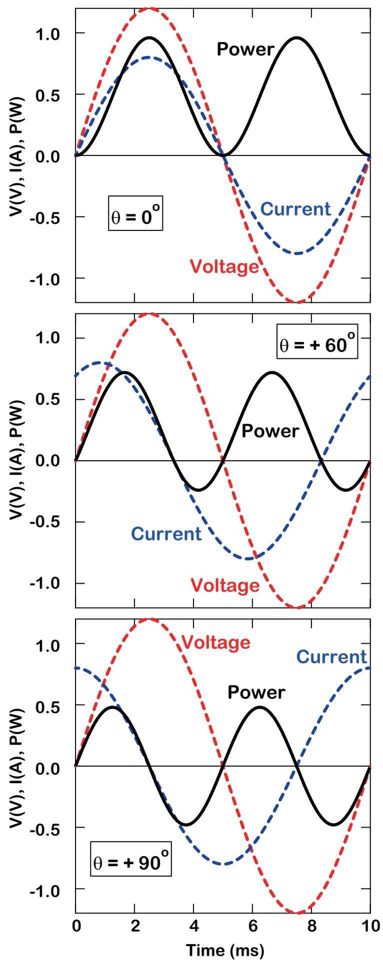

図 6.1 電圧波形と電流波形の位相差が 0°, 60°, 90°, −90° の場合における電力の波形．同じ振幅の電圧と電流波形であっても，位相差によって電力の時間平均値が異なることが読み取れる．

6.1　交流電力の復習

コイルやコンデンサが関与する交流回路の場合，電力が消費ばかりとは限らないことを以前に紹介した．本章では，それを正弦波交流の場合についてもう少し詳しく学ぶ．

図 6.1 は，電圧と電流の振幅は変えずに，位相だけを

[*1] 英語では Reactive Power という．日本語の「無効」という意味合いとは異なる．

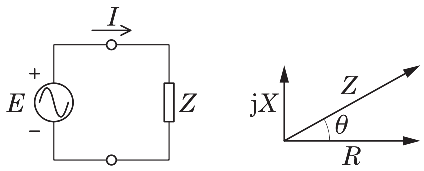

図 6.2 瞬時電力計算例題のための図.

変えて，電力を計算した結果である．この図から，電圧と電流の振幅が同じであっても，両者の位相差が異なると，電力波形が変わり，その平均値も変わることが読み取れる．従って，交流電力を議論する場合には，平均してゼロになる成分（反射される成分）と平均してもゼロにならない成分（正味の消費電力）に分ける必要がある，ということを理解してもらえると思う．以下に，上記の成分を導出する例題を設定したので，各自で検証して欲しい．

課題

図 6.2 に示した交流回路の負荷インピーダンスにおける電力の瞬時値を表す式を導出し，**電力の一周期の平均値がゼロになる成分と，ゼロにならない成分があること**を示せ．なお，電源の周波数は ω，初期位相はゼロ，フェーザ形式の電圧値は $\boldsymbol{E}$ とする．負荷インピーダンスは

$$Z = R + \mathrm{j}X = |Z|\exp(\mathrm{j}\theta)$$

とする．

略解

瞬時値が要求されているので，時間領域の実関数 $e(t)$ と $i(t)$ を求めて，それらの積 $p(t) = e(t)i(t)$ を計算する，という方針をとる．

与えられた電圧とインピーダンスから，フェーザ形式での電流は，

$$I = \frac{E}{Z} = \frac{|E|}{|Z|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}} = \frac{|E|}{|Z|}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta} = |I|\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta} \tag{6.1}$$

となる．従って，時間領域の実関数で表した電圧と電流の波形，$e(t)$ と $i(t)$，は

$$e(t) = E_\mathrm{m}\sin\omega t, \tag{6.2}$$
$$i(t) = I_\mathrm{m}\sin(\omega t - \theta) \tag{6.3}$$

となる．ここで，$E_\mathrm{m} = \sqrt{2}\,|E|, I_\mathrm{m} = \sqrt{2}\,|I|$ とした．$e(t)$ と $i(t)$ の積を計算すると，

$$p(t) = e(t)i(t) \tag{6.4}$$
$$= 2|E||I|\sin\omega t\sin(\omega t - \theta) \tag{6.5}$$
$$= |EI|\cos\theta - |EI|\cos(2\omega t - \theta) \tag{6.6}$$

となる．上式から，以下のことがわかる．

- 第一項目：
$$|EI|\cos\theta$$
は時間に依存しない項である．即ち，平均しても残る項である．
- 第二項目：
$$|EI|\cos(2\omega t - \theta)$$
は時間に依存し，電源の周波数の二倍の周波数で変動する．従って，一周期で（或いは半周期でも）平均するとゼロになる成分である．

以上のように，交流電力の瞬時値の計算結果から，交流電力には平均するとゼロになる成分とゼロにならない成分があることがわかった．では，Z の大きさや偏角，即ち，R, L, C の組み合わせ具合によって，その成分はどのように異なるのであろうか？というのが次の検討課題である．

6.2 負荷が R, L, C の場合の瞬時電力と平均電力

前節の $e(t)i(t)$ の式を変形すると，

$$p(t) = |EI|\cos\theta - |EI|\cos(2\omega t - \theta) \tag{6.7}$$
$$= |EI|\cos\theta - |EI|\cos\theta\cos 2\omega t - |EI|\sin\theta\sin 2\omega t \tag{6.8}$$

となる．

6.2.1 R のみの場合

これは，

$$\theta = 0, \quad \cos\theta = 1, \quad \sin\theta = 0$$

に相当する．従って，電力の瞬時値と平均値は，以下のようになる．

- **瞬時値**
$$p(t) = |EI| - |EI|\cos 2\omega t \tag{6.9}$$

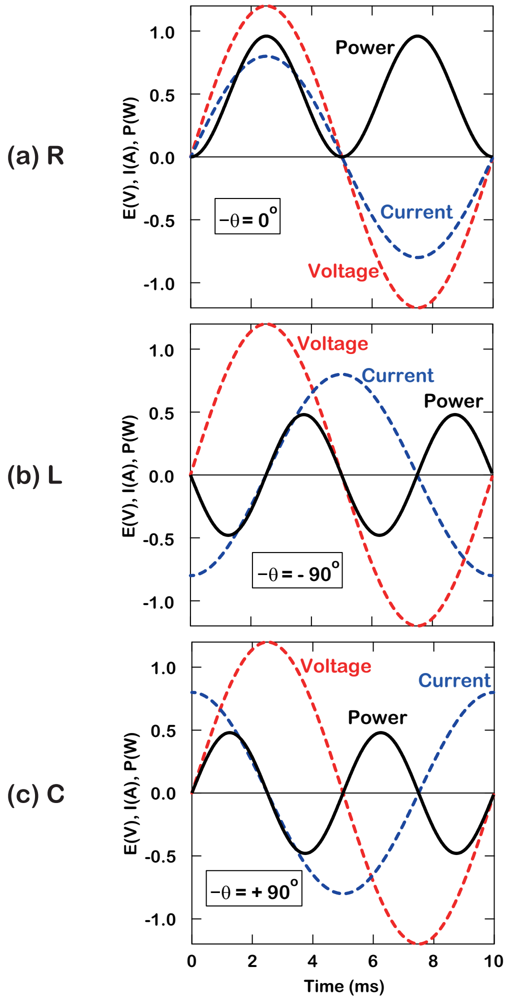

図 6.3 R, L, C だけの回路素子の電圧，電流，電力波形．

- **平均値**

$$\langle p(t) \rangle = |EI| \qquad (6.10)$$

具体的に図示すると**図 6.3**(a) のようになる．電力波形が常に正であり，電源周波数の二倍の周波数で変動していることがわかる．

6.2.2　L のみの場合

これは，

$$\theta = +\frac{\pi}{2}, \quad \cos\theta = 0, \quad \sin\theta = +1$$

に相当する．従って，電力の瞬時値と平均値は，以下のようになる．

- **瞬時値**

$$p(t) = -|EI| \sin 2\omega t \qquad (6.11)$$

- **平均値**

$$\langle p(t) \rangle = 0 \qquad (6.12)$$

具体的に図示すると**図 6.3**(b) のようになる．電力波形は，電源周波数の二倍の周波数で変動しており，その振動の中心がゼロであるため，平均値はゼロになってしまう．

6.2.3　C のみの場合

これは，

$$\theta = -\frac{\pi}{2}, \quad \cos\theta = 0, \quad \sin\theta = -1$$

に相当する．従って，電力の瞬時値と平均値は，以下のようになる．

- **瞬時値**

$$p(t) = +|EI| \sin 2\omega t \qquad (6.13)$$

- **平均値**

$$\langle p(t) \rangle = 0 \qquad (6.14)$$

具体的に図示すると**図 6.3**(c) のようになる．電力波形は，電源周波数の二倍の周波数で変動しており，その振動の中心がゼロであるため，平均値はゼロになってしまう．L の場合と異なる点は，電力波形の位相が異なっている点である．二倍の周波数となっているため，もとの電圧電流に対する位相で議論することはできないが，L の場合と C の場合で，電力の波形が反転していることは読み取れると思う．

6.3　交流電力を定義する三つのパラメータの導入

電力の瞬時値を表す式をもう一度見てみよう．

$$\begin{aligned} p(t) = &|EI| \cos\theta - |EI| \cos\theta \cos 2\omega t \\ &-|EI| \sin\theta \sin 2\omega t \end{aligned} \qquad (6.15)$$

電力の波形を見てわかるように，電力波形は基本的に電源周波数の二倍の周波数で変動する．従って，二倍の周波数で変動することを前提として，平均するとゼロになる部分とそうでない部分に分けてみよう．この式を，以下のように分離する

- **変動するが，平均値がゼロにはならない成分**

$$\begin{aligned} &|EI|\cos\theta - |EI|\cos\theta\cos 2\omega t \\ &= |EI|\cos\theta\,(1-\cos 2\omega t) \\ &= |EI|\cos\theta\,(2\sin^2\omega t) \end{aligned} \tag{6.16}$$

- **変動して，かつ，平均値がゼロになる成分**

$$-|EI|\sin\theta\ \sin 2\omega t$$

これより，交流電力の特徴を表すパラメータとして以下の三つのパラメータを定義する．

- **皮相電力** 実効値の単純積

$$|EI|$$

- **有効電力** 平均が非ゼロとなる振動成分の平均値

$$|EI|\cos\theta$$

- **無効電力** 平均がゼロとなる振動成分の振幅

$$|EI|\sin\theta$$

6.4 皮相電力

皮相電力とは，後述の複素電力 S の絶対値であり，フェーザ形式で表した電圧と電流の大きさをかけ算しただけの「見せかけの電力」である．

$$|S| = |EI| = |ZI^2| = |E^2/Z| \tag{6.17}$$

単位として，実効的に電力を消費する [W]（ワット）と区別するために **[VA]（ボルトアンペア）**という単位が使われている．

6.5 有効電力と力率

有効電力とは，実際に負荷で消費される電力であり，電力波形の平均値である．

$$P = |EI|\cos\theta = |S|\cos\theta \tag{6.18}$$

この電力は，実効的に電力を消費するものであるから，**[W]（ワット）**と同じ単位が用いられている．

$$\cos\theta \tag{6.19}$$

は**力率**と呼ばれており，皮相電力の内，どれだけの割合が実効的に消費される電力なのかを表す指標となっている．$\cos\theta$ は 0 から 1 の間の値を取るが，それを 100 倍し，「%」を用いて表すことが多い．

力率の中の θ は，インピーダンスの偏角である．従って，インピーダンスの偏角と大きさが与えられれば，電圧もしくは電流の実効値を用いて，有効電力を計算することができる．

6.6 無効電力

無効電力は，蓄積と放出が繰り返される成分であり，実効的には消費されない成分である．

$$Q = |S|\sin\theta \tag{6.20}$$

単位としては，**[var]（バール）**という単位が用いられている[*2]．

$$\sin\theta \tag{6.21}$$

はリアクタンス率という名前が付いているが，ほとんど利用されない．

6.7 複素電力の定義

電圧と電流がフェーザ形式で与えられているとき，それらの積を計算すると電力らしきものが得られると想定される．その際，前節までで導入した三つの電力成分とつじつまの合う形で電圧と電流の積，即ち，電力を定義しなければならない．

皮相電力 $|S|$，有効電力 P，無効電力 Q，偏角 θ の関係を図示すると，**図 6.4**(a) のようになる．これとつじつまの合うように**複素電力**を定義すると，**図 6.4**(b) のようになる．

6.8 複素電力の計算式

前節のように複素電力が定義されたが，それを計算するときに，単純にフェーザ形式の電圧とフェーザ形式の電流の積を計算したらよい，という訳では無い，というのがこの節である．

結論から先に述べると，複素電力を定義通りに算出す

[*2] 教科書によっては，最初の v が大文字になって，Var としているものもある．

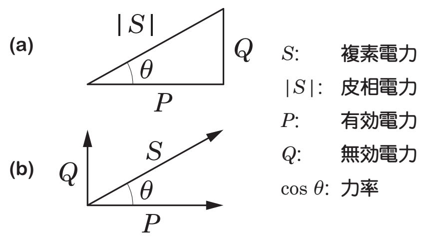

図 6.4 複素電力を定義するための図．(a) 皮相電力 $|S|$，有効電力 P，無効電力 Q，偏角 θ の関係と，(b) これらの関係を満足するように定義した複素電力の複素平面上での描像．

るためには，以下のように計算しなければならない．

$$S = E\bar{I} \qquad S = EI^* \tag{6.22}$$

ここで，$\bar{I}$ や I^* は I の共役複素数であることを示すものである．即ち，フェーザ形式の電圧とフェーザ形式の**電流の共役複素数をかけ算する**，という作法になる．

課題

電圧電流をフェーザ形式で表したときに，複素電力を計算するためには，それらの単純な積ではダメであり，電流を共役複素数にしてかけ算しなければならないことを示せ．

略解

電圧を $E = |E|e^{j0} = |E|$，負荷のインピーダンスを $Z = |Z|e^{j\theta}$ とする．このとき，電流は，$I = |I|e^{-j\theta}$ となる．

E と I の単純な積を計算すると，

$$EI = |E||I|e^{-j\theta} \tag{6.23}$$

となり，単純な EI の積を計算すると複素電力の偏角の符号が定義と逆になる．

一方，電流を複素共役にして計算すると，

$$EI^* = |E||I|e^{j\theta} \tag{6.24}$$

となり，複素電力の定義と偏角の符号が一致することが確認できる．

豆知識

豆知識

古典電気計測

永久磁石による一定磁場の中に置かれたコイルに電流を流すと，電流と磁束密度の積に比例した力がコイルに作用する．**図 6.5**(a) は，こうした電磁気学的な作用を利用した昔ながらの可動コイル型の電流計である (電圧計にもなる).

但し，可動コイル型を交流に適用すると困ったことになる．コイルが追従できるほどの低周波であれば，針はその電流の振動に対応して左右に振動するであろう．しかし，周波数が高くなると，コイルは平均電流に対応した動きをするようになる．正弦波交流の平均値はゼロであるから，針はゼロを指したままとなり，意味がない．

交流電流や電圧は，平均すればゼロであるから，計測して意味があるのは，振幅に関する情報である．これを計測してくれるのが，**図 6.5**(b) に示した可動鉄片型と呼ばれるタイプである．このタイプでは，コイルに電流が流れることによって磁場が発生し，針に取り付けられた鉄片が磁化される．このときコイルと鉄片の間に働く引力が電流の二乗に比例した力となる．なぜなら，磁束密度は電流に比例し，電磁力は磁束密度と電流の積に比例するからである．電流が正弦波交流の時には，

$$\text{力} \propto (I_\mathrm{m}\sin\omega t)^2 = \frac{1}{2}I_\mathrm{m}^2(1-\cos 2\omega t)$$

となる．鉄片の動きが周波数に追従できない場合には，平均的な力がかかる．$\cos 2\omega t$ は平均するとゼロであるから，

$$\langle\,\text{力}\,\rangle \propto I_\mathrm{m}^2$$

となり，針の動きは，電流の振幅の二乗に比例したものとなる．目盛が等間隔ではなくなるが，鉄片の構造を工夫すると，電流の大きさに対する針の動きを線形にすることができる．

古典的な方法で交流電流や電圧を計測しようとすると，可動コイル型ではなく，可動鉄片型にする必要があるが，電力に関しては，可動コイル型が活躍する．可動コイル型の永久磁石の代わりに電磁石を用いると電力計となるのである．**図 6.5**(c) に示したように，電力を計りたい部分の電圧 v に比例した電流 v/R が電磁石の励磁用に流れるようにしておき，可動コイルには電力を計りたい部分を流れた (或いは流れる) 電流 i を流す．すると，磁束密度が電圧 v に比例することとなり，コイルに作用する力は，v と i の積となる．可動コイルの動きが追従できない周波数であれば，計測される針の振れは，v と i の積の時間平均値に比例することになる．これにより，電力が計測される．

現在は，このようなアナログ回路はほぼ皆無であり，ほとんどデジタルサンプリングした電圧と電流を演算回路で処理した結果が表示されている．

このような古いデバイスを豆知識としてわざわざ登場させたのは，かつては，電磁気学と電気回路をうまく組み合わせたデバイスが存在していたことを知って頂くためである．

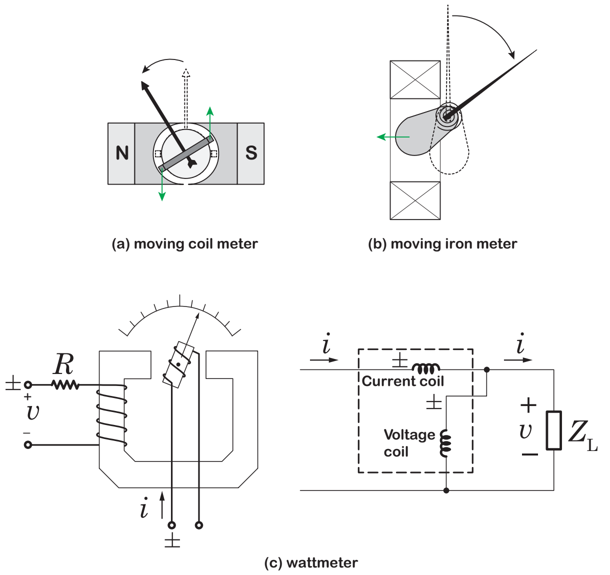

図 6.5 古典的な電流・電圧・電力計測デバイス [1,2]．(a) 可動コイル型，(b) 可動鉄片型，(c) ワットメータ．

豆知識

皮相電力と無効電力

皮相電力や無効電力という名前は，有効電力と比較するとあまり重要ではないように見える．皮相電力は「見かけの電力」なので，「見かけなのだから，大して注目しなくてよい」のだろうか？無効電力も「無効」なのだから，無視してよい」のだろうか？以下では，そうでは無いことを以下の二つの例を挙げて示す．

[A] 電力会社の電源容量は皮相電力できまる
[B] 電線での電圧降下は無効電力で調整する

豆知識

[A] 電力会社の電源容量は皮相電力できまる

電力を供給する場合には，当然であるが，電源 (発電機を含む) が必要である．第 10 章の 10.4 節でも述べているが，現実の電源は，出せる電圧や電流に上限がある．電源を利用できる上限を「電源容量」というコトバで表現している．多くの場合，電源容量というコトバを使った場合，ある規格の電圧がきまっており，その電圧を出す電源がどれだけ電流をだせるかという「電流容量」の方を指す場合が多い．ここでは，この電流容量を決めているのが有効電力ではなく，皮相電力である，ということを述べる．

負荷として抵抗 R のみが接続される場合には，その負荷での消費電力は，有効電力のみである．その値は，フェーザ形式の電圧を $\boldsymbol{E}$ とし，フェーザ形式の電流を $\boldsymbol{I}_\mathrm{R}$ とすれば，

$$\boldsymbol{I}_\mathrm{R} = \frac{\boldsymbol{E}}{R}$$

である．従って，電源側の電流容量としては，**図 6.6**(a) に示すように，交流電流瞬時値の最大値 (即ち，振幅)；

$$\sqrt{2}|\boldsymbol{I}_\mathrm{R}| = \frac{\sqrt{2}|\boldsymbol{E}|}{R}$$

をまかなうだけの電流容量があればよいことになる．

一方，この抵抗に無効電力の源であるコイル (またはコンデンサ，以下省略) が並列に接続されたらどうなるであろうか．抵抗には上記と同じ電流が流れる．コイルには電圧に対して 90° 位相がずれた電流が流れる．この電流は，既に確認したように，電圧とかけ算して時間平均値をとるとゼロになる．そのため，無効電力なる名前が付いたりしている．しかし，電力がゼロでも，電流はゼロではない．抵抗だけのときと比較すると余分な電流が流れる．従って，電力会社としては，当たり前だが，この余分に流れる無効電力の分も考慮した電流容量をもつ電源を準備しなければならない．

では，具体的には，どれだけの電流容量を確保する必要があるのか？位相がずれた電流を足し合わせると，単純に振幅を足し合わせた正弦波とはならない．位相のずれ具合も考慮して足し合わせた電流の最大振幅が，確保すべき電流容量となる．この位相のずれも考慮して足し算した電流の最大振幅に関係するのが皮相電力であるため，皮相電力が電源容量確保の指標となっている．そのことを以下に示す.

図 6.6(b) に示すように，抵抗 R に対して並列に接続されたリアクタンス $\mathrm{j}X$ がある場合を考える．抵抗 R に流れる電流に加えて，$\mathrm{j}X$ にも電流が流れる．すると，負荷を流れる電流の合計 $\boldsymbol{I}_\mathrm{L}$ は，フェーザ形式で計算すれば,

$$\boldsymbol{I}_\mathrm{L} = \boldsymbol{I}_\mathrm{R} + \mathrm{j}\boldsymbol{I}_\mathrm{X}$$

となる．この $\boldsymbol{I}_\mathrm{L}$ の大きさの $\sqrt{2}$ 倍，即ち，

$$\sqrt{2}|\boldsymbol{I}_\mathrm{L}| = \sqrt{2(|\boldsymbol{I}_\mathrm{R}|^2 + |\boldsymbol{I}_\mathrm{X}|^2)}$$

が電流の振幅となり，確保すべき最低限の電流容量ということになる．一方，皮相電力

$$|\boldsymbol{E}\boldsymbol{I}| = |\boldsymbol{E}||\boldsymbol{I}_\mathrm{L}|$$

は，$|\boldsymbol{E}|$ とこの $|\boldsymbol{I}_\mathrm{L}|$ のかけ算である．一般に，電圧の大きさ $|\boldsymbol{E}|$ は先に決まっている場合が多いので，皮相電力が判れば $|\boldsymbol{I}_\mathrm{L}|$ が決まることになる．従って，以下のように言うことができるのである．

電源側に要求される電流容量は皮相電力で決まる.

一般に，皮相電力は有効有効よりも大きく，無効電力が大きい程，皮相電力は大きくなる．従って，電源側 (即ち，電力会社側) としては，有効電力ではなく，皮相電力を考慮した電流容量の電源を消費者に対して準備しておく必要がある．

電源は，その電流容量が大きくなると大規模化し，その価格も高くなる．従って，電力会社側としては，電力を消費する側の人達に対して，以下のように言いたくなるのである．

- 「なるべく無効電力を小さくしてね」
- 「無効電力の大きい負荷をつなげたら，追加料金をもらいますよ」
- 「無効電力の小さい負荷をつなげたら割引しますよ」

これらを，本章で学んだ「力率」という用語を使って表現すれば，以下のようになる．

- 「なるべく力率を大きくしてね (最大は 1 だけど)」
- 「力率の小さい負荷をつなげたら，追加料金をもらいますよ」

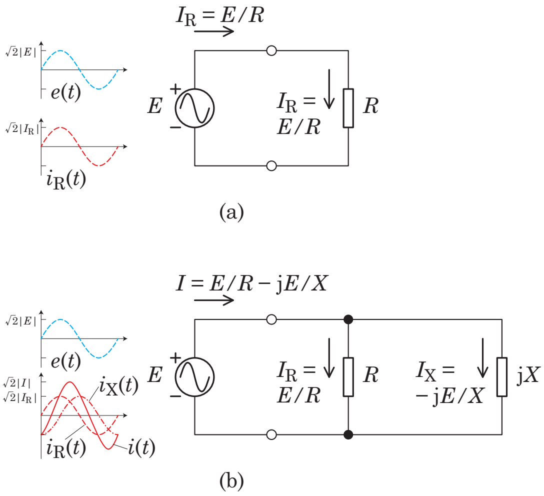

図 6.6 (a) 負荷が抵抗 R だけの場合，即ち，有効電力しかない場合の電源電圧と電源電流．(b) 抵抗 R にリアクタンス $\mathrm{j}X$ が並列に接続された場合の電源電圧と電源電流．

- 「力率の大きい負荷をつなげたら，割引しますよ」

上記の割引は，「**力率割引**」と称されており，実際に実施されている．興味があれば，各自でネット検索してみよ．参考までに，関西電力の電気供給約款の関連部分を以下に引用しておく [3].

> 電気機器の力率をそれぞれの入力によって別表 6 (加重平均力率の算定) により加重平均してえた値が，85 パーセントを上回る場合 ((4) ロにより契約電力を定める場合を含みます．) は，基本料金を 5 パーセント割引し，85 パーセントを下回る場合は，基本料金を 5 パーセント割増しいたします．この場合，電気機器の力率は，別表 7 (進相用コンデンサ取付容量基準) の基準に適合した容量の進相用コンデンサが取り付けてあるものについては 90 パーセント，取り付けてないものについては 80 パーセント，電熱器については 100 パーセントといたします．

課題

力率改善コンデンサ (その 1)

上記のように力率を 1 に近づけることは，電気料金も割引なることから，一般には，「良いこと」とされている．従って，力率を 1 に近づけることを「**力率改善**」というコトバで表現する．**図 6.7** に示したように，抵抗と正のリアクタンスが並列接続された負荷の場合に力率改善をするためにはどうすればよいか？

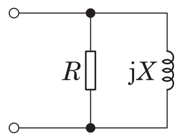

図 6.7 力率改善コンデンサの接続に関する問題 1.

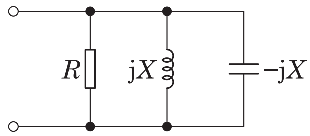

図 6.8 力率改善コンデンサの接続に関する問題 1 の解答．

略解

図 6.8 のように符号が反対で，大きさが同じリアクタンスを更に並列に接続すればよい．そうすれば，合成インピーダンスの虚部はゼロとなり，力率は 1 となる．

一般に，非抵抗型の電力利用事業の多くは，「モーター」を利用した事業である[*3]．従って，多くの場合，負荷に含まれるリアクタンス成分は正である．従って，そのような負荷の力率改善を行う場合には，コンデンサが用いられることになる．そのようなコンデンサのことを「**力率改善コンデンサ**」と称している．

課題

力率改善コンデンサ (その 2)

上記の問題の場合，力率を最適値である 1 にすることが可能であるが，そうでない場合もある．例えば，**図 6.9**(a)(b) に示すように，リアクタンスと抵抗が直列接続

[*3] 当初，「鉄道に代表されるような」という枕コトバをつけてしまっていた．これは大きな誤り．一般の鉄道で使うモーターは直流モーターでした．但し，新幹線だけは異なります．初期の 100 系までは直流モーターでしたが，300 系から交流モーターになっています．また，交流モーターが随所で使われているという例を挙げるなら，「鉄道」ではなく，工場の旋盤，ポンプ，空調用ファンなどを例としてあげるべきでした．

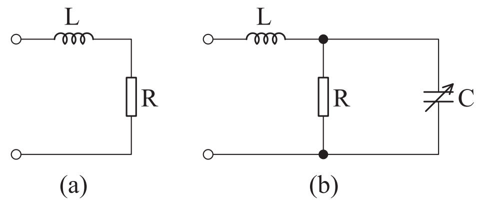

図 6.9 力率改善コンデンサの接続に関する問題 2.

された負荷に対して，力率改善コンデンサが抵抗の両端にしか接続できない場合を想定してみよう．この場合，力率を 1 にすることは可能なのだが，どんな R と ωL でも可能というわけではなく，$R \geq 2\omega L$ でなければ，力率 1 を達成することはできない．そのことを示せ．

略解

コンデンサを接続した場合の端子間のインピーダンス Z は次式で与えられる．

$$Z = \mathrm{j}\omega L + \frac{1}{1/R + \mathrm{j}\omega C} = \mathrm{j}\omega L + \frac{R}{1+\mathrm{j}\omega CR}$$
$$= \frac{R}{1+\omega^2 C^2 R^2} + \mathrm{j}\omega \left(L - \frac{CR^2}{1+\omega^2 C^2 R^2} \right). \quad (6.25)$$

力率が 1 であるとは，Z の虚部がゼロということである．従って，力率を 1 にするためには，次式が成り立つような C を用いればよいことになる．

$$L - \frac{CR^2}{1+\omega^2 C^2 R^2} = 0. \quad (6.26)$$

これを変形すれば，以下のような C に関する二次方程式が得られる．

$$(\omega^2 R^2 L)\, C^2 - R^2\, C + L = 0. \quad (6.27)$$

これを満たす C は，単純に二次方程式の解の公式を当てはめると，次式のように表されることになる．

$$C = \frac{R^2 \pm \sqrt{(R^2)^2 - 4(\omega^2 R^2 L)L}}{2(\omega^2 R^2 L)}$$
$$= \frac{R^2 \pm R\sqrt{R^2 - (2\omega L)^2}}{2(\omega^2 R^2 L)}$$
$$= \frac{R^2 \pm R\sqrt{(R+2\omega L)(R-2\omega L)}}{2(\omega^2 R^2 L)}. \quad (6.28)$$

このとき，ルートの中の $(R - 2\omega L)$ が負になった場合には，コンデンサの容量 C が複素数になるため，実現不可能となる．従って，R と ωL の間には，以下の関係が成り立っている必要があるのである．

$$R \geq 2\omega L. \quad (6.29)$$

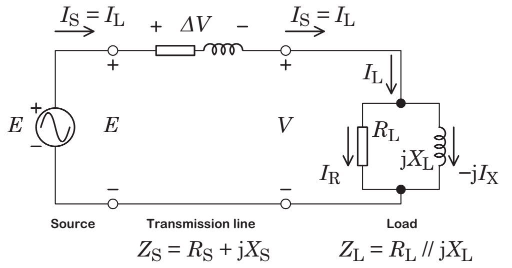

図 6.10 電線の抵抗成分とリアクタンス成分を考慮した負荷への給電回路.

豆知識

[B] 電線での電圧降下は無効電力で調整する [4]

電源から負荷への電力供給は，送電経路を通じて行われる．その際，送電経路は，電線や変圧器で構成されており，それらはインピーダンスを有する[*4]．従って，送電経路に電流が流れれば，必ず送電経路に電圧が発生するため，電源電圧と負荷電圧の大きさや位相に差が生じる．言い換えれば，電源電圧を一定に保っていても，負荷の有効電力や無効電力が変われば，負荷に印加される電圧が変わる．このとき，負荷に無効電力をうまく追加することにより，負荷電圧の大きさだけは変わらないようにすることができる．電源電圧に対する負荷電圧の位相は変わってしまうのだが，負荷電圧の大きさが変わらないことから，有効電力は変わらない，という特徴を有する．当然であるが，無効電力は変わる．しかし，後述の課題で示したように，無効電力が小さくなる方向 (即ち，力率が大きくなる方向) 方向に変わると，一石二鳥ということになる．このような措置を**無効電力補償**という．

課題

無効電力補償のメカニズム

上記の電圧変動の発生と補償のメカニズムを述べよ．

略解

電源 E と負荷インピーダンスの間に存在する送電経路のインピーダンス Z_S を抵抗 R_S とリアクタンス $\mathrm{j}X_S$ の直列接続で表すと，**図 6.10** のようになる．ここで，負荷として抵抗 R_L とコイル $\mathrm{j}X$ の並列接続を想定する．

[*4] 後述の豆知識を参照されたし．

送電経路に流れる電流を I_S とすると，送電経路に発生する電圧，即ち，電源電圧 $\boldsymbol{E}$ と負荷電圧 $\boldsymbol{V}$ の差 $\Delta V = \boldsymbol{E} - \boldsymbol{V}$ は,

$$\Delta V = (R_S + jX_S)\, I_S$$

となる．一方, 負荷に流れる電流を I_L とすると, **図 6.10** の回路構成の場合には,

$$I_S = I_L$$

である．従って，電源電圧 $\boldsymbol{E}$ と負荷電圧 $\boldsymbol{V}$ の差 ΔV は, 負荷電流 $\boldsymbol{I}$ を用いて

$$\Delta V = (R_S + jX_S)\, I_L$$

と表すことができる．

抵抗 R_L に流れる電流を I_R，コイル jX に流れる電流を $-jI_X$ とすると，負荷電流 $\boldsymbol{I}$ は,

$$I_L = I_R - jI_X$$

と表されるので,

$$\begin{aligned}\Delta V &= (R_S + jX_S)\,(I_R - jI_X)\\ &= (R_S I_R + X_S I_X) + j\,(X_S I_R - R_S I_X)\\ &= \Delta V_R + j\Delta V_X\end{aligned}$$

となる．ここで,

$$\begin{aligned}\Delta V_R &= R_S I_R + X_S I_X,\\ \Delta V_X &= X_S I_R - R_S I_X\end{aligned}$$

とした．

ここで，負荷の有効電力を P，無効電力を $-jQ$ とすれば,

$$\begin{aligned}P &= |V| I_R,\\ Q &= |V| I_X\end{aligned}$$

であるから，ΔV_R と ΔV_X は，有効電力 P と無効電力 Q を用いて，以下のように表される．

$$\begin{aligned}\Delta V_R &= \frac{R_S P + X_S Q}{|V|},\\ \Delta V_X &= \frac{X_S P - R_S Q}{|V|}.\end{aligned}$$

従って,

> 電源電圧と負荷電圧の差 ΔV は，負荷の有効電力 P と無効電力 Q によって変わる

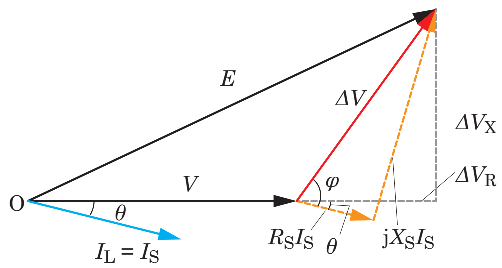

図 6.11 電線の抵抗成分とリアクタンス成分を考慮した負荷への給電回路に関するフェーザ・ダイヤグラム．

ということがわかる．この状況をフェーザ・ダイヤグラムで描くと，**図 6.11** のようになる．ここで，後述の計算を楽にするために，V の偏角がゼロになるように描いてある．

上述の ΔV は，フェーザで表したときの $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{V}$ の差 $\boldsymbol{E} - \boldsymbol{V}$ であるが, 今問題にしているのは, 電源電圧の大きさ $|\boldsymbol{E}|$ と負荷電圧の大きさ $|\boldsymbol{V}|$ の差であるから，$|\boldsymbol{E}| - |\boldsymbol{V}|$ を求める必要がある．フェーザ・ダイヤグラムから,

$$\Delta V = \boldsymbol{E} - \boldsymbol{V} = \Delta V_R + j\Delta V_X$$

であるが，V を実部しか持たないようにフェーザ・ダイヤグラムを描いたので,

$$V = |V|$$

となる．従って,

$$\boldsymbol{E} = |V| + \Delta V_R + j\Delta V_X$$

より,

$$|\boldsymbol{E}|^2 = (|V| + \Delta V_R)^2 + \Delta V_X^2$$

となる．電源電圧の大きさと負荷電圧の大きさの差を知りたいのであれば，この式を解いて得られる $|V|$ が $|\boldsymbol{E}|$ とどれくらい違うのかがわかればよい．

解くための準備として，式を簡単化するために,

$$A = R_S P + X_S Q, \tag{6.30}$$

$$B = X_S P - R_S Q \tag{6.31}$$

とおくと,

$$|\boldsymbol{E}|^2 = \left\{|V| + \frac{A}{|V|}\right\}^2 + \left\{\frac{B}{|V|}\right\}^2 \tag{6.32}$$

となる．これは，$W = |V|^2$ に関する以下のような二次方程式となる．

$$W^2 + (2A - |\boldsymbol{E}|^2)W + (A^2 + B^2) = 0.$$

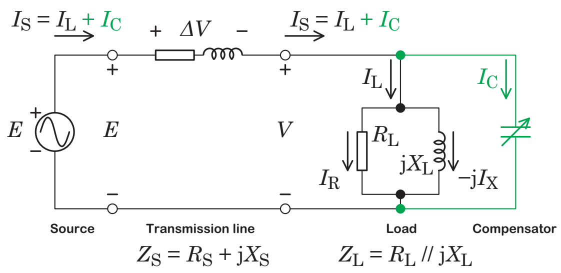

図 6.12 $|E| = |V|$ を満たすために新たな無効電力のもとになる補償素子を接続した回路.

これを解いて W を求めれば，$|V|$ が得られる．

$$a = 1,$$
$$b = 2A - |E|^2,$$
$$c = A^2 + B^2$$

とすれば，

$$|V|^2 = W = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

より，

$$|V| = \sqrt{W} = \sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

となる．ここで，二次方程式の解の公式の中の符号 ± のどちらをとるかは，想定している問題に応じて選択する必要がある．後述の課題では，無効電力が 0 から徐々に大きくなり，負荷の電圧が $|E|$ から徐々に下がった場合を想定し，電源電圧の大きさに近い方を採用している．

次に，**「負荷での電圧を一定に保つには」**について考える．式で表せば，次式を満たせばよい，ということになる．

$$|E| = |V|.$$

その手段として，**図 6.12** に示すように，負荷と並列に新たな無効電力 Q_C のもとになる回路を接続し[*5]，

$$Q' = Q + Q_C$$

とする．すると，

$$|E|^2 = \left\{|V| + \frac{R_S P + X_S Q'}{|V|}\right\}^2 + \left\{\frac{X_S P - R_S Q'}{|V|}\right\}^2 \quad (6.33)$$

*5 接続すべき素子として，既にコンデンサが描かれている．解答のこの時点では，まだ何を接続したらよいのかは判っていないので，コンデンサを描いてしまうのはマズイのだが，答えとしては，コンデンサとなる．実際に，「進相コンデンサ」名称で販売されている．

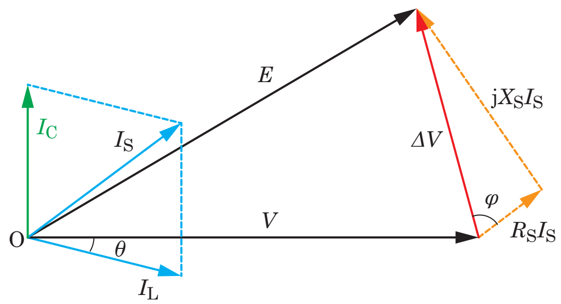

図 6.13 補償無効電力を追加し，電源電圧と負荷電圧の大きさが等しくなるようにしたときのフェーザ・ダイヤグラム．

となる．目的とすることは，$|E|^2 = |V|^2$ となるようにすることであるから，それを満たすような Q' を求めればよい．式 (6.33) において，$|E|^2 = |V|^2$ とすると，以下に示すような Q' に関する二次方程式が得られる．

$$aQ'^2 + bQ' + c = 0.$$

ここで，a，b，c は以下の通りである．

$$a = R_S^2 + X_S^2, \quad (6.34)$$
$$b = 2|V|^2 X_S, \quad (6.35)$$
$$c = (|V|^2 + R_S P)^2 + X_S^2 P^2 - |V|^4. \quad (6.36)$$

従って，Q' が以下のような値になるような無効電力を負荷と並列に接続すれば，$|E| = |V|$ が実現できる．

$$Q' = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (6.37)$$

このとき，符号 ± のどちらを採用するかは，「負荷電圧の大きさを電源電圧の大きさと等しくする」ということ以外の要件できまることになる．例えば，力率が著しく下がったりしないか，などである．後述の課題にて具体的な検討例を示したので，詳しくはそちらを参考にして欲しい．

上記の Q'，もしくは追加された Q_C を数式で書くと，極めて複雑で見通しの悪いものとなるが，フェーザ・ダイヤグラムで描くと，**図 6.13** のようになる．この図から，電線での電圧 ΔV が発生するのは避けられないが，負荷とは独立した無効電力 Q_C(を担う電流 I_C) を追加することによって電線の電流 I_S の位相を調整し，赤と橙で描かれた三角形の大きさと角度を変えることで，$|E| = |V|$ を実現していることがわかるであろう．

具体的な数値を用いた計算をすると[*6]，新たに接続すべき無効電力の担い手は，電圧に対して電流の位相が進む素子，即ち，コンデンサとなることがわかる．既に学んだように，コンデンサの並列接続は，力率改善の働きもある．しかし，任意の負荷に対して，力率 1 と $|E| = |V|$ を両方一度に実現することは，残念ながらできない．一般には，力率を改善することで，同時に電圧も完璧ではないが回復する．そのため，力率改善の方を優先する場合が多い．

課題

負荷の電圧変動とその補償 (計算練習 1) [4]

電源電圧は $E = 10\,\mathrm{kV}$, 負荷の有効電力は $P = 25\,\mathrm{MW}$, 無効電力は $Q = +50\,\mathrm{MVar}$ とする．これらの有効電力と無効電力の値から，力率は $25/\sqrt{25^2+50^2} = 0.4472$ となる．$Q > 0$ であるから，電圧に対して電流が遅れる「遅れ力率」である．即ち，負荷は，抵抗とコイルの並列接続負荷であるといえる．送電経路の抵抗とリアクタンスは，それぞれ，$R_\mathrm{S} = 0.0784\,\Omega$，$X_\mathrm{S} = 0.3922\,\Omega$ とする．このときの負荷電圧の大きさを求めよ (電源電圧の大きさよりも小さくなる)．

次に，負荷電圧の大きさと電源電圧の大きさを等しくするための進相コンデンサの無効電力の値を求めよ．また，もともとの負荷と進相コンデンサを合わせた負荷の力率を求めよ[*7]．

略解

まず，$|V|$ を求めよう．$|V|$ を求める際の係数 A と B は，式 (6.30)，式 (6.31) より，

$$A = R_\mathrm{S}P + X_\mathrm{S}Q = 21.57\,\mathrm{kV}^2,$$
$$B = X_\mathrm{S}P - R_\mathrm{S}Q = 5.885\,\mathrm{kV}^2$$

である．これらの係数と，$|E| = 10\,\mathrm{kV}$ であることを用いて式 (6.32) を解けば，$|V|$ が得られる．二次方程式の解の公式の符号として + をとるか − をとるかによって，以下の二つの解が得られる．

$$|V|^2 = 45.59\,\mathrm{kV}^2 \rightarrow |V| = 6.782\,\mathrm{kV}\ \ (+\text{ の場合})$$
又は
$$|V|^2 = 10.87\,\mathrm{kV}^2 \rightarrow |V| = 3.297\,\mathrm{kV}\ \ (-\text{の場合})$$

となる．どちらも解であるが，ここでは，無効電力が 0 から徐々に 50 Mvar に増えていった場合を考えることにする．すると，無効電力が 0 のときには，負荷電圧の大きさは $|E|$ と同じであり，そこから徐々に減少するので，最初に解として合致するのは絶対値の大きい方である．そこで，電源電圧の大きさである 10 kV に近い方が現実的な解であると考えられる．以上より，電線に電流が流れたことによって，負荷の電圧の大きさは，電源電圧の大きさの 10 kV よりも約 3.2 kV 小さい $|V| = 6.78\,\mathrm{kV}$ となる，と結論される．

次に，負荷電圧と電源電圧の位相差を求めておこう．A，B を用いれば，位相を含めた電圧の差 ΔV は，

$$\Delta V = \frac{A}{|V|} + \mathrm{j}\frac{B}{|V|} = (3.181 + \mathrm{j}0.8678)\,\mathrm{kV}$$

となる．E については，問題設定の際にその大きさが $|E| = 10\,\mathrm{kV}$ であるという情報だけを与えており，V との位相差を未知としていたが，この ΔV が既知となることで，V に対する E の位相差が以下のように求められる．E をフェーザで書けば，

$$\begin{aligned} E = V + \Delta V &= (9.963 + \mathrm{j}0.8678)\,\mathrm{kV} \\ &= (10.00\angle 4.978^\circ)\,\mathrm{kV} \end{aligned}$$

となるので，負荷電圧 V に対して電源電圧が約 5° の進んでいることになる．見方を変えれば，電源電圧 E に対して負荷電圧 V が約 5° 遅れている，ということになる．

なお，このときの負荷電流 I_L は，

$$\begin{aligned} I_\mathrm{L} = \frac{P - \mathrm{j}Q}{|V|} &= (3.686 - \mathrm{j}7.373)\,\mathrm{kA} \\ &= (8.243\angle -63.43^\circ)\,\mathrm{kA} \end{aligned}$$

となることから，負荷の力率 PF は (すでに判っていることであるが)，

$$\mathrm{PF} = \cos(-63.43^\circ) = 0.447\ (\text{遅れ})$$

となる．参考までに，これらを考慮してフェーザ・ダイヤグラムを描くと，**図 6.14**(a) のようになる．

次に，負荷電圧の大きさ $|V|$ を $|E|$ と同じ 10 kV にするために必要な補償用の無効電力 Q_C として如何なる値

[*6] 後述の演習問題を参照されたし．

[*7] 問題設定と略解の途中では (桁落ちなどの影響を抑えるために) 有効数字を 4 桁にしているが，解答の有効数字は，現実的なものとして 3 桁にしてある

のものを付けたらよいのかを計算してみよう．そのために，式 (6.37) の Q' を算出しよう．式 (6.34)~ (6.36) の係数は以下のようになる．

$$
\begin{aligned}
a &= R_S^2 + X_S^2 \\
&= 0.160\ \Omega^2, \\
b &= 2|V|^2 X_S \\
&= 2 \times (10 \times 10^3) \times 0.3922 \\
&= 7.844 \times 10^7\ \mathrm{V^2\Omega} \\
c &= (|V|^2 + R_S P)^2 + X_S^2 P^2 - |V|^4 \\
&= ((10 \times 10^3)^2 + 0.0784 \times (25 \times 10^6))^2 \\
&\quad +(0.3922 \times 25)^2 - (10 \times 10^3)^4 \\
&= 4.920 \times 10^{14}\ \mathrm{V^4}.
\end{aligned}
$$

これらを式 (6.37) に代入して二次方程式の解の公式を適用すると，符号の + をとるか − をとるかによって，以下の二つの解が得られる．

$$
\begin{aligned}
Q' &= -6.354\ \mathrm{Mvar}\ \ (+\ \text{の場合}) \\
&\quad \text{又は} \\
&= -483.9\ \mathrm{Mvar}\ \ (-\text{の場合}).
\end{aligned}
$$

従って，追加すべき無効電力は，

$$
\begin{aligned}
Q_C &= Q' - Q \\
&= -6.534 - 50 = -56.35\ \mathrm{Mvar}\ \ (+\ \text{の場合}) \\
&\quad \text{又は} \\
&= -483.9 - 50 = -534.0\ \mathrm{Mvar}\ \ (-\text{の場合})
\end{aligned}
$$

となる．無効電力が負であるから，どちらの場合も，進み力率となるコンデンサを接続すればよいことがわかる．後述の補足説明にあるように，後者の Q'(− 符号を採用した場合) を採用すると，力率が著しく悪くなる．従って，前者の Q'(+ 符号を採用した場合) を採用することにする．即ち，結論としては，

$$
Q_C = -56.4\ \mathrm{Mvar}
$$

なる無効電力を付け加えることによって，負荷電圧の大きさを電源電圧の大きさと同じにすることができる，となる．

次に，このコンデンサも含めた負荷の力率がどのようになるのかを見てみよう．コンデンサを含めた負荷に流れる電流は，元々の負荷に流れる電流 I_L と新たに付け加えたコンデンサに流れる電流 I_C の和として求められる．コンデンサに流れる電流 I_C は，

$$
I_C = \frac{-\mathrm{j}Q_C}{|V|} = \mathrm{j}\frac{56.35\ \mathrm{Mvar}}{10\ \mathrm{kV}} = \mathrm{j}5.635\ \mathrm{kA}
$$

となる．一方，もともとの負荷に流れる電流 I_L は，電圧が $V = 10$ kV となったことにより，

$$
\begin{aligned}
I_L = \frac{P - \mathrm{j}Q}{|V|} &= (2.500 - \mathrm{j}5.000)\ \mathrm{kA} \\
&= (5.590\angle -63.43^\circ)\ \mathrm{kA}
\end{aligned}
$$

となる．I_L と I_C の和 (即ち，電線を流れる電流 I_S である) は，

$$
\begin{aligned}
I_S = I_L + I_C &= (2.500 + \mathrm{j}0.635)\ \mathrm{kA} \\
&= (2.579\angle 14.25^\circ)\ \mathrm{kA}
\end{aligned}
$$

となる．従って，コンデンサを含めた負荷の力率は，

$$
\mathrm{PF} = \cos 14.25^\circ = 0.969\ (\text{進み})
$$

となる．あるいは, 以下のように計算しても同じである．

$$
\mathrm{PF} = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q_0^2}} = \frac{25}{\sqrt{25^2 + (-6.354)^2}} = 0.969.
$$

無効電力補償の措置を講じる前の力率が 0.447 であったのに対し，措置を講じた後の力率が 0.969 となっている．即ち，無効電力補償の措置を講じることによって，負荷電圧の大きさが電源のそれと同じになると同時に，力率も改善されていることがわかる．

ちなみに，このときの ΔV を求めてみると，以下のようになる．

$$
\begin{aligned}
A &= R_S P + X_S Q_0 = -0.5322\ \mathrm{kV^2} \\
B &= X_S P - R_S Q_0 = 10.30\ \mathrm{kV^2}
\end{aligned}
$$

より，

$$
\begin{aligned}
\Delta V &= \frac{A}{|V|} + \mathrm{j}\frac{B}{|V|} = \frac{-0.5322}{10} + \mathrm{j}\frac{10.30}{10} \\
&= (-0.05322 + \mathrm{j}1.030)\ \mathrm{kV} \\
&= (1.031\angle 92.96^\circ)\ \mathrm{kV}
\end{aligned}
$$

となる．従って，電源電圧 E をフェーザで書くと，

$$
\begin{aligned}
E = V + \Delta V &= (9.947 + \mathrm{j}1.030)\ \mathrm{kV} \\
&= (10.00\angle 5.912^\circ)\ \mathrm{kV}
\end{aligned}
$$

となる．

上の結果から，コンデンサを付け加えて電源電圧の大きさと負荷電圧の大きさを同じにした場合には，負荷電圧 V に対して電源電圧 E の位相が約 6° 進むことになったことがわかる．逆に言えば，電源電圧 E に対する負荷電圧の位相が 6° 遅れることになった，ということになる．これらを考慮してフェーザ・ダイヤグラムを描くと，**図 6.14**(b) のようになる．

補足説明

もう一つの Q' を選択するとどうなるか

Q' を求めるための二次方程式の解として出てきたもう一つの解,

$$Q' = -483.9 \text{ Mvar}$$

を採用するとどうなるのかをここで検証する．この場合,

$$Q_\text{C} = Q' - Q = -534.0 \text{ Mvar}$$

となる．この無効電力もコンデンサで実現できるものであるが，そこに流れる電流 I_C は,

$$I_\text{C} = -\text{j}\frac{Q_\text{C}}{|V|} = \text{j}\frac{534.0 \text{ Mvar}}{10 \text{ kV}} = \text{j}53.40 \text{ kA}$$

となる．この値は，先ほどの解で出てきた I_C の大きさよりも 10 倍ほど大きい値となっている．従って，無効電力用の電流として先ほどの解よりも大きい電流が流れることになる．これが電力会社にとって嫌なことである，ということは既に述べた通りである．従って，もしも I_C が小さい解が別にあるなら，そちらを採用した方が，電力会社としては有り難いのである．

これを力率という観点で見てみよう．もともとの負荷に流れる電流 I_L は，V が同じであるから，Q_C の有無によって変わらず,

$$\begin{aligned} I_\text{L} &= (2.500 - \text{j}5.000) \text{ kA} \\ &= (5.590\angle -63.43^\circ) \text{ kA} \end{aligned}$$

である．したがって，電線を流れる電流 I_S は,

$$\begin{aligned} I_\text{S} = I_\text{L} + I_\text{C} &= (2.500 + \text{j}48.40) \text{ kA} \\ &= (48.46\angle 87.04^\circ) \text{ kA} \end{aligned}$$

となる．

この電流がコンデンサを含めた負荷に流れるので，コンデンサを含めた負荷の力率は,

$$\text{PF} = \cos 87.04^\circ = 0.0516$$

となり，かなり小さい値となることが確認できるであろう．

次に，E と V の位相差がどうなっているかを見てみよう．このときの ΔV を求めてみると,

$$\begin{aligned} A &= R_\text{S}P + X_\text{S}Q_0 = -187.9 \text{ kV}^2 \\ B &= X_\text{S}P - R_\text{S}Q_0 = 47.75 \text{ kV}^2 \end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned} \Delta V &= \frac{A}{|V|} + \text{j}\frac{B}{|V|} = \frac{-187.9}{10} + \text{j}\frac{47.75}{10} \\ &= (-18.79 + \text{j}4.775) \text{ kV} \\ &= (19.38\angle 165.7^\circ) \text{ kV} \end{aligned}$$

となる．これらを用いて E をフェーザ形式でもとめてみると,

$$\begin{aligned} E = V + \Delta V &= (-8.79 + \text{j}4.775) \text{ kV} \\ &= (10.00\angle 151.5^\circ) \text{ kV} \end{aligned}$$

となり，E と V の位相差が先ほどの解よりも著しく大きくなっていることがわかる．

課題

負荷の電圧変動とその補償 (計算練習 2) [4]

上の課題では，負荷の電圧の大きさを電源の電圧の大きさと同じにするような措置を講じると，完璧ではないが力率も改善されることを確認した．では，力率を 1 にすることを優先したら，負荷の電圧の大きさと電源の電圧の大きさの違いはどのようになるだろうか？

略解

$Q_\text{C} = -Q$，即ち，$Q_0 = 0$ とすれば自動的に力率は 1 になる．従って，このときの負荷電圧の大きさ $|V|$ を求めればよい．式 (6.30)，式 (6.31) より,

$$\begin{aligned} A &= R_\text{S}P = 1.960 \text{ kV}^2 \\ B &= X_\text{S}P = 9.805 \text{ kV}^2 \end{aligned}$$

である．これらと $|E| = 10$ kV を用いて式 (6.32) を解くと,

$$|V|^2 = 95.03 \text{ kV}^2 \ \rightarrow\ |V| = 9.748 \text{ kV}$$

となる．電源 $|E| = 10$ kV と比較すると，約 0.252 kV の電圧降下となり，もとの 10 kV に対して 2.5% の電圧降下ということになる．

従って，もしも，2.5% 程度の電圧降下ならば負荷が適切に動作する許容範囲内である，というのであれば，負荷電圧の大きさを電源と同じにすることを優先するよりは，むしろ力率を 1 にする方を優先した方がよい，ということになる．

ちなみに，このときの ΔV を求めて見ると，以下のようになる．

$$\Delta V_R = 0.2010 \text{ kV}, \quad \Delta V_X = 1.006 \text{ kV}.$$

より，

$$\Delta V = (0.2010 + \mathrm{j}1.006) \text{ kV} = (1.026\angle 78.70^\circ) \text{ kV}$$

従って，電源 E をフェーザで書けば，

$$E = V + \Delta V = (9.949 + \mathrm{j}1.006) \text{ kV} = (10.00\angle 5.773^\circ) \text{ kV}$$

となる．

また，このときの負荷に流れる電流 I_L は，$V = 9.748$ kV であるから，

$$I_L = \frac{P - \mathrm{j}Q}{|V|} = (2.565 - \mathrm{j}5.129) \text{ kA} = (5.735\angle 63.43^\circ) \text{ kA}$$

となる．追加されたコンデンサに流れる電流は，$Q_C = -Q$ としているので，この電流の虚数部の符号が反対になった電流となる．即ち，

$$I_C = +\mathrm{j}5.129 \text{ kA}$$

となる．これらを考慮してフェーザ・ダイヤグラムを描けば，**図 6.14(c)** のようになる．

豆知識
送電線のインピーダンス

送電線は単なる電線であり，理想的な電線は抵抗ゼロである．しかし，そんなものは実存しない．従って，電線には必ず抵抗成分がある．電線の材料をアルミ (抵抗率 $\rho = 2.82 \times 10^{-8}$ Ωm)，電線断面積を $S = 20$ mm^2 (半径 $a = 2.54$ mm)，単位長さ (1 m) 当たりの抵抗 R_S は，

$$R_{S(1\,\mathrm{m})} = \rho\frac{1}{S} = 1.39 \times 10^{-3}\ \Omega/\mathrm{m}$$

となる[*8]．

更に，「大地を帰路とする電線」は，電磁気学的には，単位長さ (1 m) 当たりに，以下のインダクタンスを有する [6]．

$$L_{S(1\,\mathrm{m})} = \frac{\mu_0}{2\pi}\left\{\log\left(\frac{2h}{a}\right) + \frac{\mu_S}{4}\right\}. \tag{6.38}$$

ここで，log は自然対数，h は大地との距離，a は電線の半径，μ_S は電線の比透磁率 (アルミの場合，$\mu_S = 1$)，μ_0 は真空の透磁率 ($\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m) である．例えば，電線の材料がアルミで，電線の大地からの高さを $h = 30$ m，電線の半径を先ほどと同様に $a = 2.54$ mm とすると，

$$L_{S(1\mathrm{m})} = 2.04 \times 10^{-5} \text{ H/m}$$

となる．

一般に，電線業界では，1 km 当たりの抵抗やインダクタンスで表すので，

$$R_{S(1\,\mathrm{km})} = 1.39\ \Omega/\mathrm{km}, \quad L_{S(1\,\mathrm{km})} = 0.0204 \text{ H/km}$$

となる．周波数が 60 Hz の関西の場合，$\omega = 2\pi f = 377$ rad/s であるから，上の値を抵抗とリアクタンスに直せば，

$$R_{S(1\,\mathrm{km})} = 1.39\ \Omega/\mathrm{km}, \quad X_{S(1\,\mathrm{km})} = 7.68\ \Omega/\mathrm{km} \tag{6.39}$$

となる．

先述の課題「負荷の電圧変動とその補償 (計算練習 2)」の電線のインピーダンスの値 (0.0784 + j0.3922) Ω は，参考文献 [4] からとってきたものであるが，上記の結果で電線の長さを 50 m とすると，

$$R_{S(50\,\mathrm{m})} = 0.0696\ \Omega, \quad X_{S(50\,\mathrm{m})} = 0.384\ \Omega,$$

となり，おおよそ参考文献の値と同じくらいになり，そのような長さの電線を想定した問題なのだなぁ，と推測することができる．

---

*8 この例題の電線の材料を銅からアルミに変えました．なぜなら，銅の密度が 8.94 g/cm^3 であるのに対し，アルミの密度は，2.70 g/cm^3 と軽いため，長い架線に使う材料としては，軽いアルミの方が適するからです．現在の架線のほとんどはアルミが採用されています [5]．本テキストの古い版をご覧になった方は，銅が例題の材料として挙げられていたことから「このおっさん，わかっとらんなぁ」と思ったかもしれません．スミマセンでした (2017-05-30).

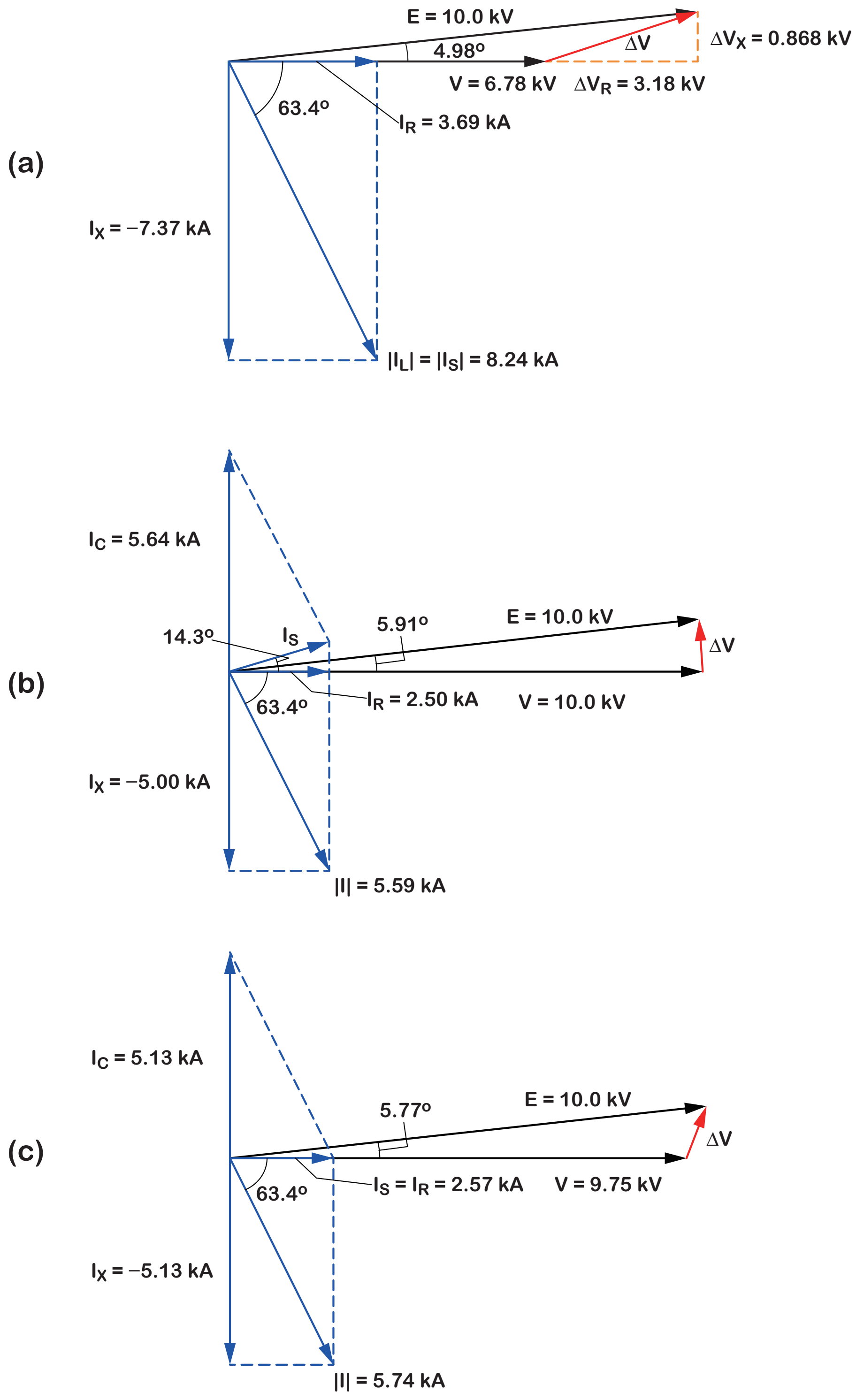

図 6.14 (a) 補償無効電力がない場合の電源電圧，負荷電圧，電流のフェーザ・ダイヤグラム．(b) 負荷電圧の大きさを電源と同じにすることを優先した補償無効電力がある場合の電源電圧，負荷電圧，電流のフェーザ・ダイヤグラム．(b) 力率を 1 にすることを優先した補償無効電力がある場合の電源電圧，負荷電圧，電流のフェーザ・ダイヤグラム．

事前基盤知識確認事項

[1] 交流電力の瞬時値を表す式

第 6.1 節の課題とする.

略解

第 6.1 節の課題の略解を見よ.

事後学習内容確認事項

1. 複素電力の計算

$V = 10\angle 0^\circ$ V，$I = 50\angle 60^\circ$ A のとき，複素電力 S をフェーザ形式 (極座標形式) で書け．皮相電力 $|S|$ を求めよ．

略解

$$\begin{aligned} S &= VI^* = (10\angle 0^\circ)\,(50\angle -60^\circ) \\ &= (500\angle -60^\circ)\ \mathrm{VA} \end{aligned}$$

$$|S| = 500\ \mathrm{VA}$$

複素電力と皮相電力の単位が VA であることに注意されたし．

2. 力率の計算

力率を % で表せ．

略解

$$\begin{aligned} \cos(-60^\circ) &= 0.5 \\ &= 50.0\% \end{aligned}$$

3. 有効電力の計算

有効電力 P を求めよ．

略解

$$\begin{aligned} P &= |S|\cos(-60^\circ) = 500 \times 0.5 \\ &= 250\ \mathrm{W} \end{aligned}$$

有効電力の単位が W であることに注意されたし．

参考文献

[1] C. K. Alexander and M. N. O. Sadiku: *Fundamentals of Electric Circuits 5th Ed.* (McGraw-Hill, New York, NY, 2013) pp. 483–484.

[2] S. Tumanski: *Principles of Electrical Measurement* (Taylor & Francis, New York, NY, 2006) Chapter 3 *Classic electrical measurement*, pp. 73-119.

[3] 関西電力株式会社: 電気供給約款 (平成 27 年 6 月 1 日実施) (関西電力株式会社, 大阪, 2015) p. 28. http://www.kepco.co.jp/home/ryoukin/contract/

[4] T. J. E. Miller: in *Reactive Power Control In Electric Systems*, Ed. Timothy J. E. Miller (John Wiley & Sons, New York, NY, 1982) Chapter 1 *The theory of load compensation*, pp. 1–48.

[5] 中島 勝久: 最近のアルミニウム系導電材料, 電気学会雑誌 93, 257-264 (1973).

[6] 後藤 憲一, 山崎 修一郎: 詳解 電磁気学演習 (共立出版, 東京, 1970) p. 276.